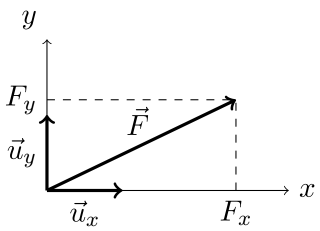
Vecteurs - Systèmes de coordonnées

Nous avons abordé la mécanique en début d'année essentiellement sous son aspect scalaire, avec la notion d'énergie. Cela nous a permis d'étudier des mouvements à 1 dimension (axiale, pour des mouvements rectilignes, ou radiale pour des mouvements circulaires).
Or l'espace est de dimension 3 et le mouvement quelconque d'un point matériel dans cet espace présente 3 degrés de liberté. Il sera donc décrit par un vecteur vitesse possédant a priori trois composantes. Les forces qui agissent sur le mouvement de ce point matériel possèdent elles aussi a priori trois composantes. Et les lois qui régissent le mouvement seront des lois vectorielles.
Pour commencer nous traiterons le cas à deux dimensions puis nous pourrons passer à 3 dimensions.

I. Quelques rappels sur les vecteurs

I.1. Composantes d'un vecteur



On peut définir les composantes (F_x, F_y) du vecteur $\vec{F}$ sur la base orthonormée (BON) $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$ par

$$\boxed{\vec{F} = F_x\vec{u}_x + F_y\vec{u}_y}$$

F_x est la composante du vecteur $\vec{F}$ sur $\vec{u}_x$
F_y est la composante du vecteur $\vec{F}$ sur $\vec{u}_y$

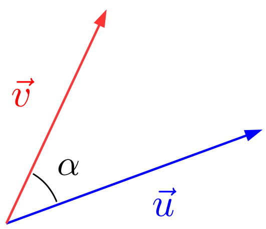
On peut représenter le vecteur $\vec{F}$ sous forme de colonne : $\boxed{\vec{F}\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix}}$

Enfin, la valeur de la norme du vecteur $\vec{F}$ se calcule aisément à l'aide du théorème de Pythagore :

$$\boxed{\|\vec{F}\| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}}$$

I.2. Produit scalaire

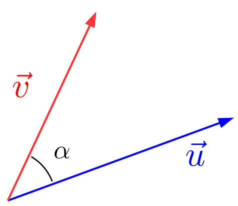
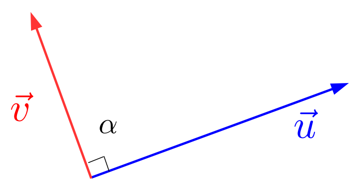
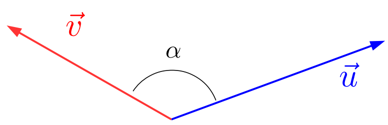
a) Rappel



$$\boxed{\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\alpha}$$

$$\vec{u}.\vec{v} = 0 \text{ pour } \vec{u} \perp \vec{v}$$

$$\vec{u}.\vec{u} = \|\vec{u}\|^2$$

		
$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$	$\alpha = \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$
$\vec{u}.\vec{v} > 0$	$\vec{u}.\vec{v} = 0$	$\vec{u}.\vec{v} < 0$

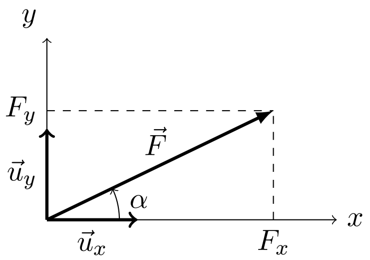
I.3. Produit scalaire et composantes

a) Expression du produit scalaire

Soient deux vecteurs $\vec{u}$ de coordonnées (u_x, u_y) et $\vec{v}$ de coordonnées (v_x, v_y) sur la BON $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$. Le produit scalaire s'exprime sous la forme :

$$\boxed{\vec{u}.\vec{v} = u_x\, v_x + u_y\, v_y}$$

b) Projection d'un vecteur

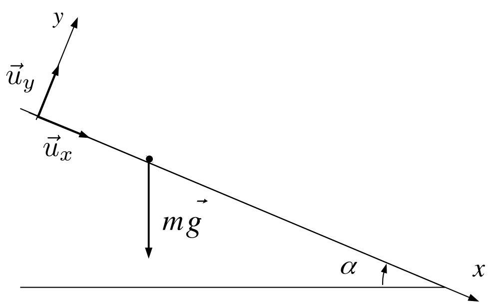


On peut exprimer les composantes du vecteur $\vec{F} = F_x\vec{u}_x + F_y\vec{u}_y$ en effectuant les projections :

- sur $\vec{u}_x$: $F_x = \vec{F}.\vec{u}_x = \|\vec{F}\| \cos\alpha$
- sur $\vec{u}_y$ $F_y = \vec{F}.\vec{u}_y = \|\vec{F}\| \sin\alpha$

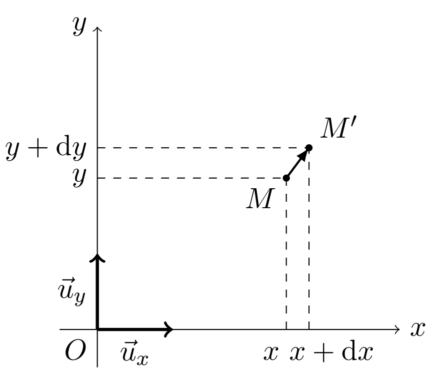
Application : projeter le poids $m\vec{g}$ sur la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$.

$m\vec{g} = mg(\sin\alpha\vec{u}_x + \cos\alpha\vec{u}_y)$



II. Systèmes de coordonnées du plan

II.1. Coordonnées cartésiennes



$$M(x, y)$$

Base orthonormée : $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y$$

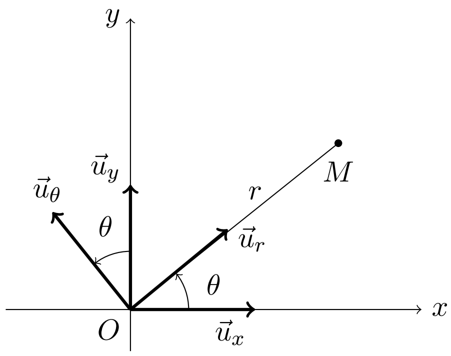
On considère un second point M' infiniment proche de M de coordonnées $(x + \mathrm{d}x, y + \mathrm{d}y)$. Le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ correspond au déplacement élémentaire :

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM} = \mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}x\vec{u}_x + \mathrm{d}y\vec{u}_y$$

$$\boxed{\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}x\vec{u}_x + \mathrm{d}y\vec{u}_y}$$

II.2. Coordonnées polaires

$$M(r,\theta) \quad \text{avec} \quad r \in \mathbb{R}^+ \quad \theta \in [0, 2\pi[$$



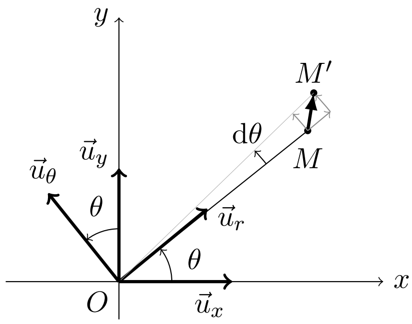
Base orthonormée : $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$

Le vecteur $\vec{u}_\theta$ se déduit du vecteur $\vec{u}_r$ par une rotation d'angle $+\frac{\pi}{2}$ dans le sens d'orientation choisi pour θ.

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r$$

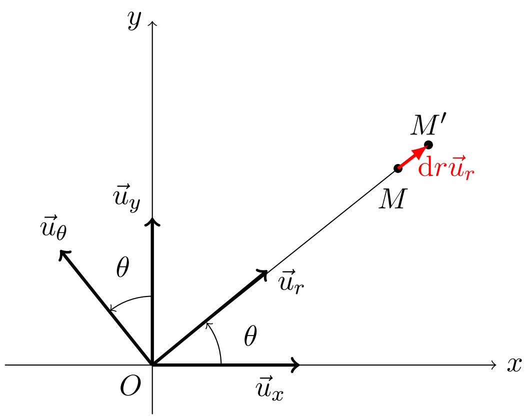
Le vecteur $\vec{u}_r$ suit la position du point M au cours de son mouvement. La base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ est donc une base mobile au cours du mouvement de ce point. On peut projeter ces vecteurs sur la base fixe $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$

$$\begin{cases} \vec{u}_r = \cos\theta\vec{u}_x + \sin\theta\vec{u}_y \\ \vec{u}_\theta = -\sin\theta\vec{u}_x + \cos\theta\vec{u}_y \end{cases}$$

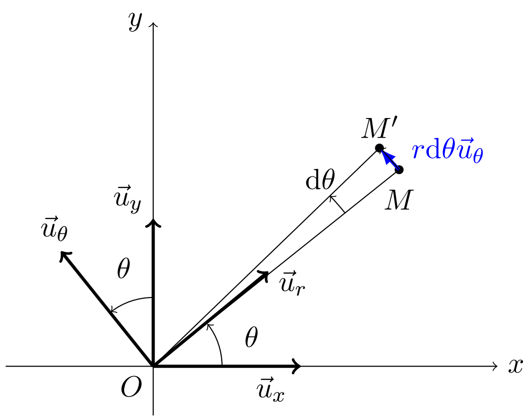


Déplacement élémentaire : $\boxed{\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}r\vec{u}_r + r\mathrm{d}\theta\vec{u}_\theta}$

Pour retrouver chacune des composantes du déplacement élémentaire, on fait varier successivement r et θ.



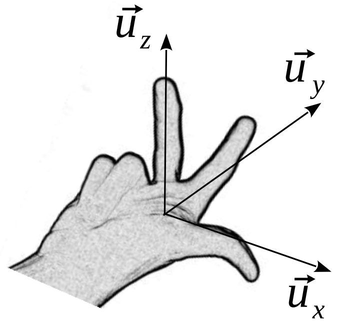
Lorsque r varie de $\mathrm{d}r$ à θ fixé ($\mathrm{d}\theta = 0$), le déplacement élémentaire se réduit à $\mathrm{d}r\vec{u}_r$



Lorsque θ varie de $\mathrm{d}\theta$ à r fixé ($\mathrm{d}r = 0$), le déplacement suit un arc de cercle de rayon r dans la direction de $\vec{u}_\theta$: $r\mathrm{d}\theta\vec{u}_\theta$.

III. Systèmes de coordonnées de l'espace 3D

III.1. Orientation de l'espace : sens direct



Soit $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ une base orthonormée (BON).

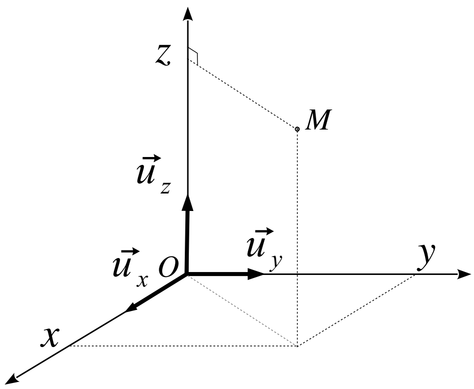
Cette base est considérée comme **directe** si on peut la réaliser à l'aide de la règle de la **main droite** (voir schéma ci-contre).

Par permutation circulaire ($x \to y \to z \to x$), les bases $(\vec{u}_y, \vec{u}_z, \vec{u}_x)$ et $(\vec{u}_z, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$ sont également des bases orthonormées directes.
La base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, -\vec{u}_z)$ est alors dite base indirecte.

Toutes les bases que nous allons introduire par la suite seront choisies dans le sens direct.

Nous reviendrons sur la notion d'orientation de l'espace quand nous aborderons le produit vectoriel de deux vecteurs.

III.2. Coordonnées cartésiennes



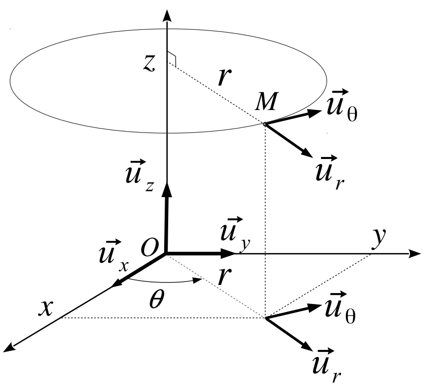
$M(x, y, z)$

$\overrightarrow{OM} = x\,\overrightarrow{u_x} + y\,\overrightarrow{u_y} + z\,\overrightarrow{u_z}$

$$\boxed{\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}x\,\overrightarrow{u_x} + \mathrm{d}y\,\overrightarrow{u_y} + \mathrm{d}z\,\overrightarrow{u_z}}$$

III.3. Coordonnées cylindriques (ou cylindro-polaires)

$$M(r, \theta, z) \quad \text{avec} \quad \left| \begin{array}{l} r \in \mathbb{R}^+ \\ \theta \in [0, 2\pi[\\ z \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$

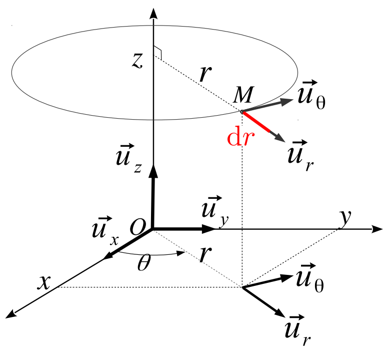


$\overrightarrow{OM} = r\,\overrightarrow{u_r} + z\,\overrightarrow{u_z}$

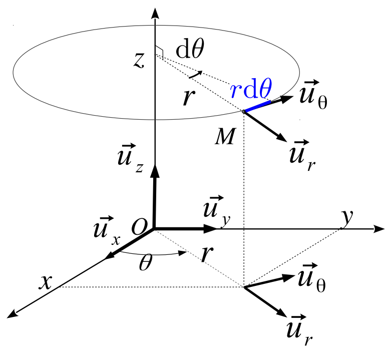
$$\text{avec} \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = \cos\theta\,\overrightarrow{u_x} + \sin\theta\,\overrightarrow{u_y} \\ \overrightarrow{u_\theta} = -\sin\theta\,\overrightarrow{u_x} + \cos\theta\,\overrightarrow{u_y} \end{cases}$$

$$\boxed{\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}r\,\overrightarrow{u_r} + r\mathrm{d}\theta\,\overrightarrow{u_\theta} + \mathrm{d}z\,\overrightarrow{u_z}}$$

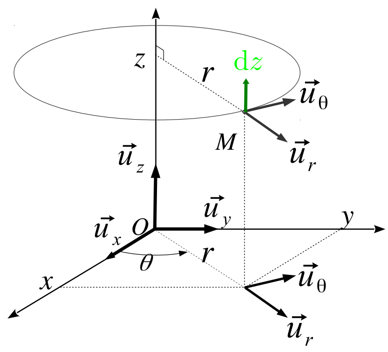
Pour retrouver les composantes du déplacement élémentaire on fait varier successivement r à θ et z fixés, θ à r et z fixés, z à r et θ fixés.



$\mathrm{d}r\vec{u}_r$



$r\mathrm{d}\theta\vec{u}_\theta$



$\mathrm{d}z\vec{u}_z$

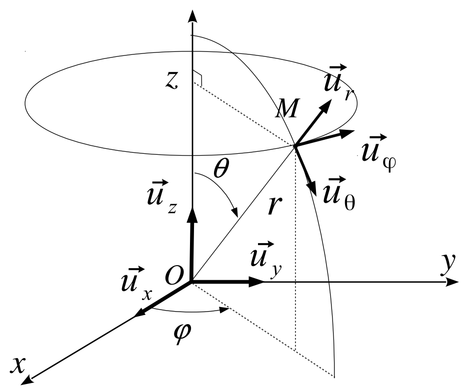
III.4. Coordonnées sphériques

$M(r,\theta,\varphi)$ avec $\left| \begin{array}{l} r \in \mathbb{R}^+ \\ \theta \in [0,\pi] \\ \varphi \in [0,2\pi[\end{array} \right.$

$\overrightarrow{OM} = r\,\overrightarrow{u_r}$

$$\text{avec} \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = \sin\theta(\cos\varphi\,\overrightarrow{u_x} + \sin\varphi\,\overrightarrow{u_y}) + \cos\theta\,\overrightarrow{u_z} \\ \overrightarrow{u_\theta} = \cos\theta(\cos\varphi\,\overrightarrow{u_x} + \sin\varphi\,\overrightarrow{u_y}) - \sin\theta\,\overrightarrow{u_z} \\ \overrightarrow{u_\varphi} = -\sin\varphi\,\overrightarrow{u_x} + \cos\varphi\,\overrightarrow{u_y} \end{array} \right.$$

$$\boxed{\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}r\,\overrightarrow{u_r} + r\mathrm{d}\theta\,\overrightarrow{u_\theta} + r\sin\theta\mathrm{d}\varphi\,\overrightarrow{u_\varphi}}$$

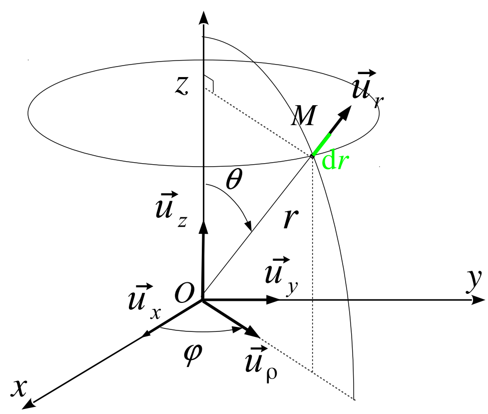


Déplacement élémentaire :
Pour retrouver les composantes du déplacement élémentaire, on fait varier successivement r à θ et φ fixé, puis θ à r et φ fixés et enfin φ à r et θ fixés.

<u>Composante suivant $\vec{u}_r$</u>

On fait varier r à φ et θ fixés. Le déplacement s'effectue radialement et donc parallèlement à $\vec{u}_r$. Il vaut

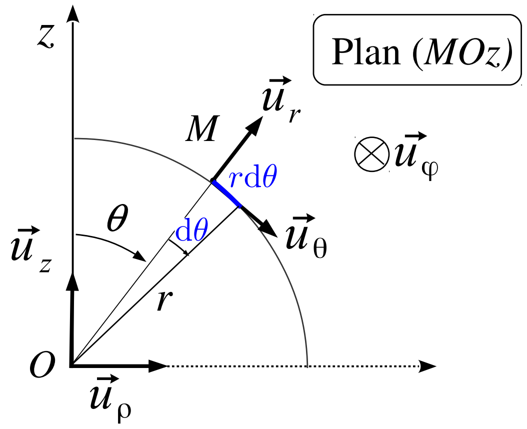
$$\mathrm{d}r\,\vec{u}_r$$



Composante suivant $\vec{u}_\theta$

On fait varier θ à r et φ fixés. Le déplacement s'effectue alors le long d'un cercle méridien et vaut

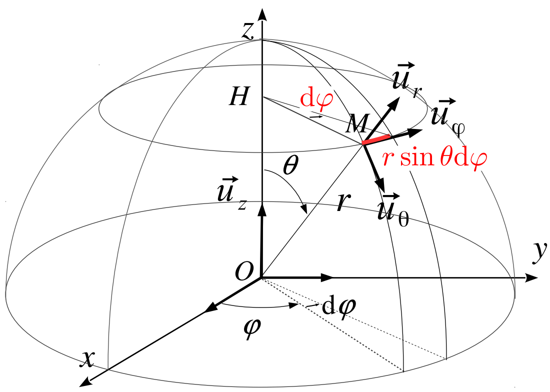
$$r\mathrm{d}\theta\,\vec{u}_\theta$$



Composante suivant $\vec{u}_\varphi$

On fait varier φ à r et θ fixés. Le déplacement s'effectue alors le long d'un cercle parallèle et vaut

$$r\sin\theta\mathrm{d}\varphi\,\vec{u}_\varphi$$

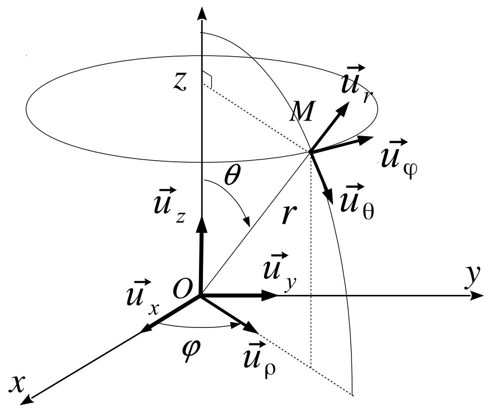


On retrouve bien graphiquement les trois composantes du déplacement élémentaire :

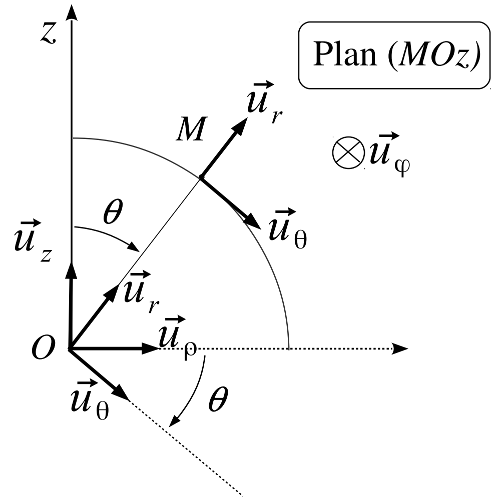
$$\boxed{\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}r\,\overrightarrow{u_r} + r\mathrm{d}\theta\,\overrightarrow{u_\theta} + r\sin\theta\mathrm{d}\varphi\,\overrightarrow{u_\varphi}}$$

Coordonnées sphériques : complément

Projection de la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$ sur $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$

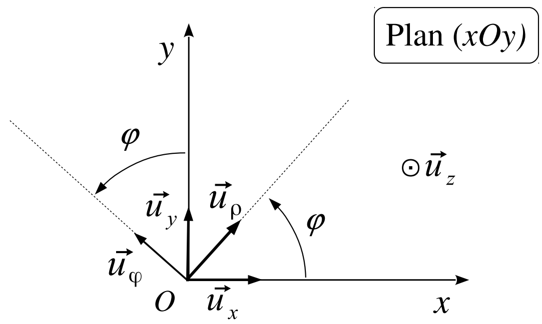


On introduit le vecteur unitaire $\vec{u}_\rho$ situé dans le plan xOy, tel que $(\vec{u}_x, \vec{u}_\rho) = \varphi$.
$\vec{u}_\rho$ se situe donc également dans le plan méridien passant par M.



On se place dans le plan méridien MOz. Ce plan contient donc O, $\vec{u}_z$ et $\vec{u}_\rho$ ainsi que les vecteurs $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_\theta$. Par projection :

$$\begin{cases} \overrightarrow{u_r} = \sin\theta\,\overrightarrow{u_\rho} + \cos\theta\,\overrightarrow{u_z} \\ \overrightarrow{u_\theta} = \cos\theta\,\overrightarrow{u_\rho} - \sin\theta\,\overrightarrow{u_z} \end{cases}$$



On se place dans le plan xOy. Par projection :

$$\begin{cases} \overrightarrow{u_\rho} = \cos\varphi\,\overrightarrow{u_x} + \sin\varphi\,\overrightarrow{u_y} \\ \overrightarrow{u_\varphi} = -\sin\varphi\,\overrightarrow{u_x} + \cos\varphi\,\overrightarrow{u_y} \end{cases}$$

On en déduit :

$$\begin{cases} \overrightarrow{u_r} = \sin\theta\,\overrightarrow{u_\rho} + \cos\theta\,\overrightarrow{u_z} = \sin\theta(\cos\varphi\,\overrightarrow{u_x} + \sin\varphi\,\overrightarrow{u_y}) + \cos\theta\,\overrightarrow{u_z} \\ \overrightarrow{u_\theta} = \cos\theta\,\overrightarrow{u_\rho} - \sin\theta\,\overrightarrow{u_z} = \cos\theta(\cos\varphi\,\overrightarrow{u_x} + \sin\varphi\,\overrightarrow{u_y}) - \sin\theta\,\overrightarrow{u_z} \end{cases}$$

On a ainsi établi les relations de projection :

$$\boxed{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = \sin\theta(\cos\varphi\,\overrightarrow{u_x} + \sin\varphi\,\overrightarrow{u_y}) + \cos\theta\,\overrightarrow{u_z} \\ \overrightarrow{u_\theta} = \cos\theta(\cos\varphi\,\overrightarrow{u_x} + \sin\varphi\,\overrightarrow{u_y}) - \sin\theta\,\overrightarrow{u_z} \\ \overrightarrow{u_\varphi} = -\sin\varphi\,\overrightarrow{u_x} + \cos\varphi\,\overrightarrow{u_y} \end{array}}$$