Signal sinusoïdal

I. Signal périodique quelconque

I.1. Période, fréquence

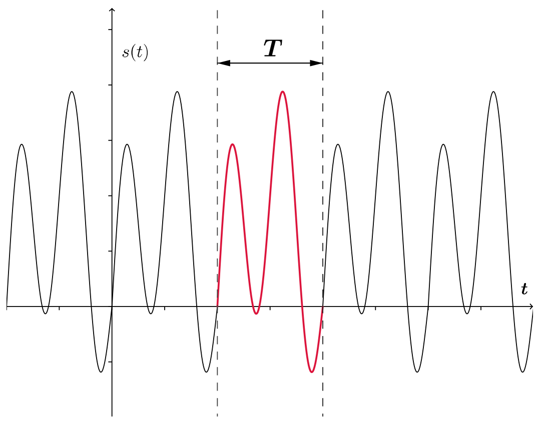
La période T d'un signal est la plus petite durée au bout de laquelle le signal se reproduit identique à lui-même.

$$s(t+T) = s(t)$$

La fréquence correspond au nombre de périodes par unité de temps :

$$\boxed{f = \frac{1}{T}}$$

L'unité SI de f est le hertz : 1 Hz=1 s^{-1}.



I.2. Valeur moyenne d'un signal périodique

a) Définition

Soit $s(t)$ un signal périodique de période T. On note $< s(t) >$ sa valeur moyenne. Par définition

$$\boxed{< s(t) >= \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} s(t)\mathrm{d}t \quad \forall t_0}$$

l'intégration se fait sur un intervalle de temps égal à la période T, l'origine t_0 pouvant être choisie arbitrairement. En général, on choisit la valeur de t_0 qui permet les calculs les plus simples.

– exemple 1 : $t_0 = 0$, on intègre alors de 0 à T.

– exemple 2 : $t_0 = -\frac{T}{2}$ on intègre alors de $-\frac{T}{2}$ à $\frac{T}{2}$, ce qui peut être utile quand la fonction $s(t)$ est paire.

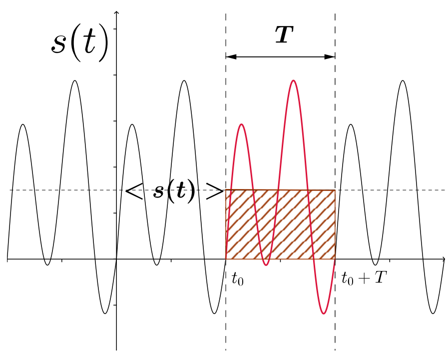
b) Interprétation graphique

$$< s(t) > T = \int_{t_0}^{t_0+T} s(t)\mathrm{d}t$$

$\int_{t_0}^{t_0+T} s(t)\mathrm{d}t$ représente l'aire sous la courbe sur une période.

$< s(t) > T$ est l'aire du rectangle de côtés $< s(t) >$ et T.

La valeur moyenne $< s(t) >$ est celle qui permet d'égaler les deux aires.



Retenir : $\boxed{< s(t) >= \frac{1}{T}\times \text{ aire sous la courbe sur une période.}}$

I.3. Valeur efficace d'un signal périodique

De nombreux signaux ont une valeur moyenne nulle. Cependant ils peuvent transmettre de l'énergie.

En effet, la puissance associée à un signal est en général proportionnelle à son carré $s^2(t)$ (par exemple la puissance moyenne consommée par une résistance R parcourue par un courant d'intensité i vaudra $R < i^2 >$.

Il est donc utile de définir la valeur quadratique moyenne $< s^2(t) >$ d'un signal, $i.e$ la valeur moyenne de son carré.

Si $s(t)$ est périodique de période T alors $s^2(t)$ l'est aussi. La valeur quadratique moyenne du signal vaudra donc, d'après la définition précédente de la valeur moyenne :

$$< s^2(t) >= \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} s^2(t)\mathrm{d}t \quad \forall t_0$$

$< s^2(t) >$ a les mêmes dimensions que $s(t)^2$ ($< s^2(t) >$ sera en A^2 si $s(t)$ est une intensité mesurée en ampère).

On souhaite que la valeur efficace du signal soit de même dimension que celui-ci. Il suffit alors de prendre la racine carrée de la valeur quadratique moyenne. On définit ainsi la valeur efficace s_{eff} sur signal par :

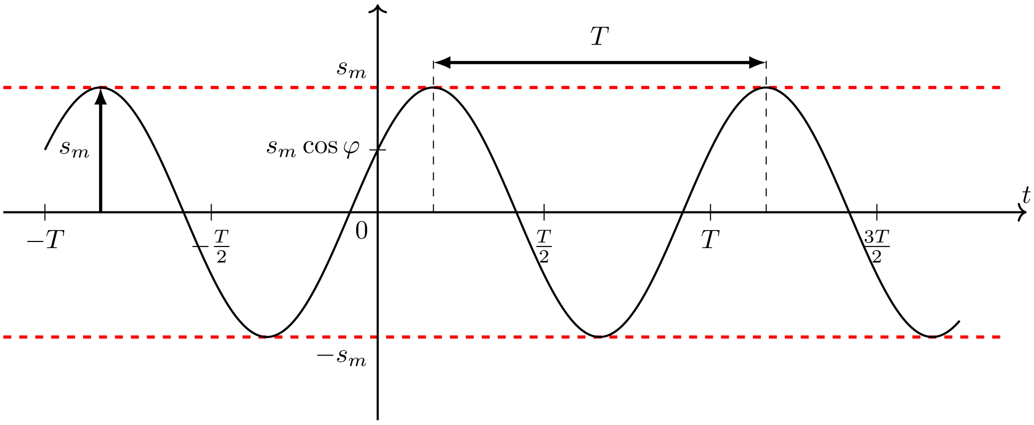
$$\boxed{s_{\text{eff}} = \sqrt{< s^2(t) >} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} s^2(t)\mathrm{d}t} \quad \forall t_0}$$

II. Cas particulier du signal sinusoïdal

II.1. Caractéristique du signal sinusoïdal

On considère un signal de la forme :

$$s(t) = s_m\,\cos(\omega\,t+\varphi)$$



s_m	amplitude du signal (s_m est de même dimension que s)
$\omega\,t+\varphi$	phase du signal (angle en radian)
φ	phase à $t=0$ $\quad \varphi \in]-\pi,\pi]$
ω	pulsation du signal (en rad.s^{-1})
T	période du signal
f	fréquence du signal $f=\frac{1}{T}$ (en s^{-1}=Hz)

Période

$s(t) = s(t+T)$

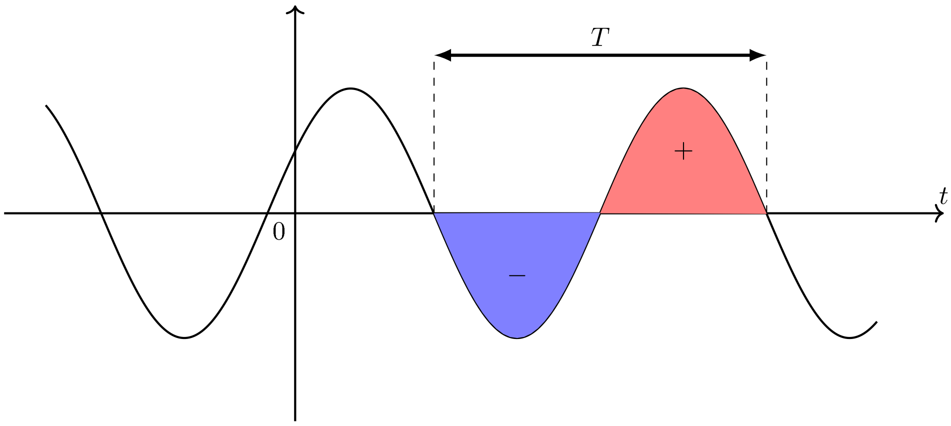
$s_m\,\cos(\omega\,t+\varphi) = s_m\,\cos(\omega\,(t+T)+\varphi)$

$s_m\,\cos(\omega\,t+\varphi) = s_m\,\cos(\omega\,t+\omega T+\varphi)$

$\omega T = 2\pi$

$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}}$ de manière équivalente $\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f}$.

II.2. Valeur moyenne d'un signal sinusoïdal



Sur une période, l'aire sous la courbe est nulle (l'aire positive compensant exactement l'aire négative).

Retenir :

$$\boxed{\begin{array}{l} < \cos(\omega t+\varphi) >= 0 \\ < \sin(\omega t+\varphi) >= 0 \end{array}}$$

→ la valeur moyenne d'un sinus (ou d'un cosinus) est nulle.

II.3. Valeur efficace d'un signal sinusoïdal

a) Valeur moyenne d'un $\cos^2$ ou d'un $\sin^2$

$$\cos^2(\omega t+\varphi) = \frac{1+\cos(2\omega t+2\varphi)}{2}$$

$$< \cos^2(\omega t+\varphi) >= \frac{1}{2} + \frac{< \cos(2\omega t+2\varphi) >}{2}$$

or $< \cos(2\omega t+2\varphi) >= 0$ car la valeur moyenne d'un cosinus est nulle. On en déduit

$$< \cos^2(\omega t+\varphi) >= \frac{1}{2}.$$

de même $\sin^2(\omega t+\varphi) = \dfrac{1-\cos(2\omega t+2\varphi)}{2}$ permet d'écrire $< \sin^2(\omega t+\varphi) >= \dfrac{1}{2}$

Retenir :

$$\boxed{\begin{array}{l} < \cos^2(\omega t+\varphi) >= \frac{1}{2} \\ < \sin^2(\omega t+\varphi) >= \frac{1}{2} \end{array}}$$

→ La valeur moyenne d'un $\cos^2$ ou d'un $\sin^2$ est égale à $\frac{1}{2}$

b) Valeur efficace

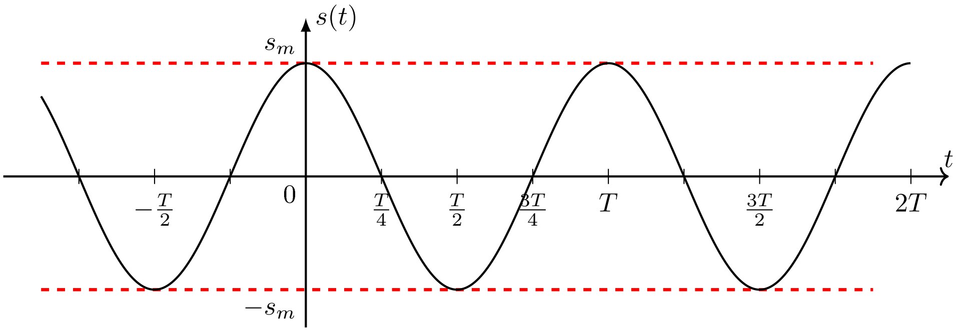
$$s_{\text{eff}}^2 =< s^2(t) >= s_m^2 < \cos^2(\omega t+\varphi) >= \frac{s_m^2}{2}$$

$$\boxed{s_{\text{eff}} = \frac{s_m}{\sqrt{2}}}$$

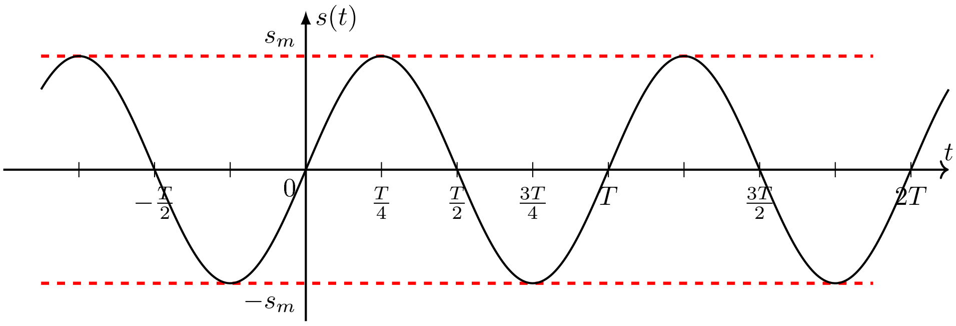
→ La valeur efficace d'un signal sinusoïdal est égale à l'amplitude du signal divisée par $\sqrt{2}$.

II.4. Reconnaissance de courbes simples

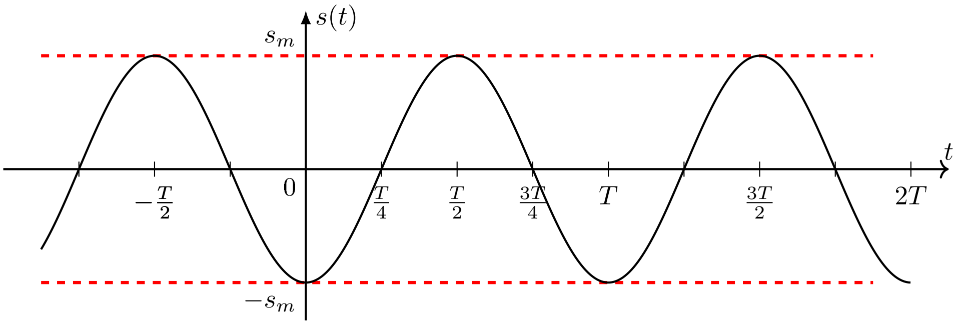
a) Courbes simples



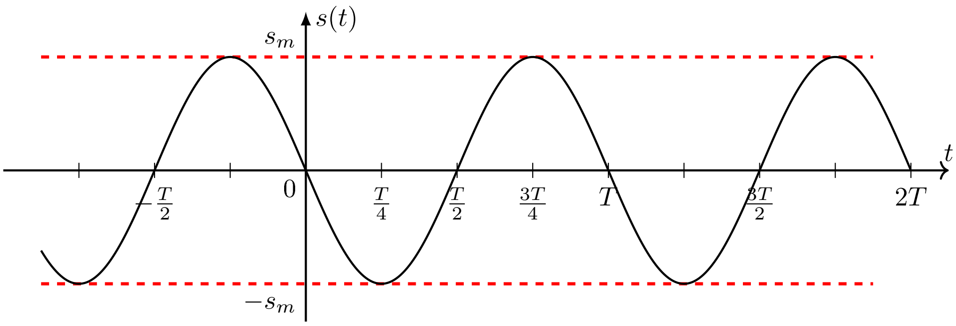
$s(t) =$



$s(t) =$



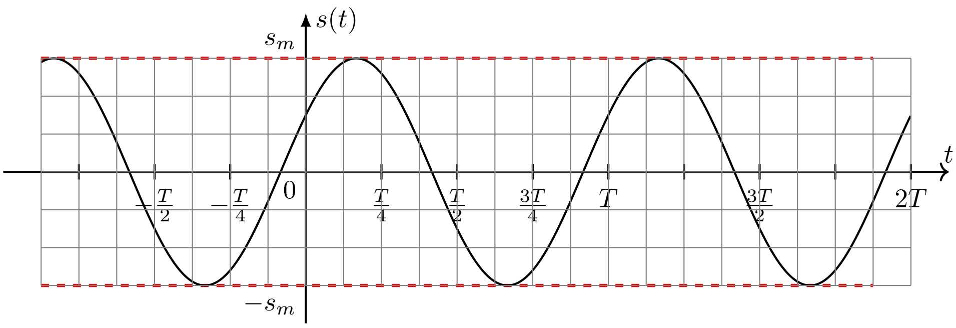
$s(t) =$



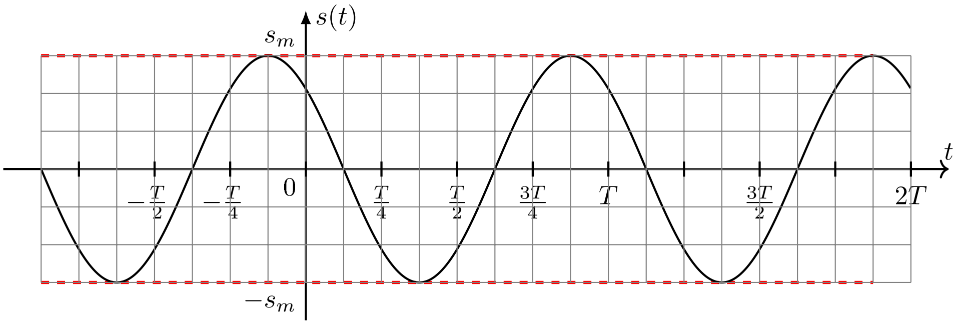
$s(t) =$

b) Autres cas

Déterminer la phase à l'origine :



$s(t) =$



$s(t) =$

II.5. Expressions équivalentes

Un même signal sinusoïdal peut s'exprimer sous plusieurs formes. On considère le signal sinusoïdal

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \varphi)$$

représentant par exemple la position d'une masse oscillante accrochée à un ressort. On peut écrire :
$x(t) = x_m \cos(\omega t + \varphi) = x_m(\cos\omega t \cos\varphi - \sin\omega t \sin\varphi) = x_m \cos\varphi \cos\omega t - x_m \sin\varphi \sin\omega t = A\cos\omega t + B\sin\omega t$

La dernière égalité devant être vérifiée quel que soit t on a : $\begin{cases} A = x_m \cos\varphi \\ B = -x_m \sin\varphi \end{cases}$

$$\boxed{x_m \cos(\omega t + \varphi) = A\cos\omega t + B\sin\omega t \text{ avec } \begin{cases} A = x_m \cos\varphi \\ B = -x_m \sin\varphi \end{cases}}$$

On peut, à l'inverse, connaissant $x(t)$ sous la forme $x(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$, calculer les valeurs de x_m et φ en fonction de A et B telles que $x(t) = x_m \cos(\omega t + \varphi)$.

$$\begin{aligned} x(t) &= A\cos\omega t + B\sin\omega t \\ &= \sqrt{A^2+B^2}\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\cos\omega t + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\sin\omega t\right) \end{aligned}$$

$$\forall t \quad x_m \cos(\omega t + \varphi) = x_m(\cos\varphi\cos\omega t - \sin\varphi\sin\omega t) = \sqrt{A^2+B^2}\left(\underbrace{\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}}_{\cos\varphi}\cos\omega t + \underbrace{\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}}_{-\sin\varphi}\sin\omega t\right)$$

On suppose $x_m > 0$ et $\varphi \in [-\pi, \pi]$. On a, par identification :

$x_m = \sqrt{A^2+B^2}$

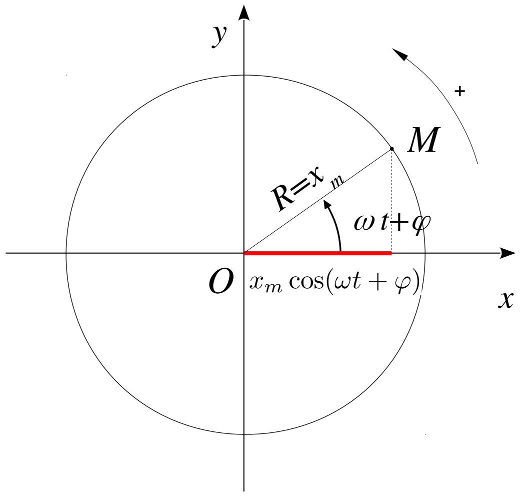
$\cos\varphi = \dfrac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$

$\sin\varphi = -\dfrac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$

pour $A \neq 0$ $\tan\varphi = -\frac{B}{A}$

$$\boxed{A\cos\omega t + B\sin\omega t = x_m\cos(\omega t + \varphi) \text{ avec } \begin{cases} x_m = \sqrt{A^2+B^2} \\ \cos\varphi = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} \\ \sin\varphi = -\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} \end{cases}}$$

II.6. Lien entre mouvement circulaire uniforme et mouvement sinusoïdal



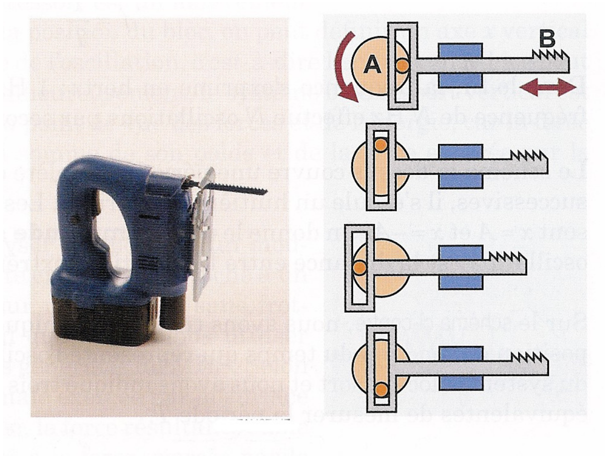
Le mouvement sinusoïdal peut être produit par la projection d'un mouvement circulaire uniforme sur un diamètre quelconque.

On a représenté sur la figure ci-contre un mouvement circulaire uniforme de rayon A, de vitesse angulaire $\omega = \frac{2\pi}{T}$, avec T période de rotation. La projection du mouvement sur l'axe Ox donne $x(t) = x_m \cos(\omega t + \varphi)$.

φ correspond à l'angle que fait OM avec l'axe Ox à $t = 0$.

Exemple : scie sauteuse.

Dans une scie sauteuse, un dispositif transforme le mouvement circulaire uniforme en un mouvement d'oscillations harmoniques : quand A fait un tour, B fait un aller-retour.



https://www.edumedia-sciences.com/fr/media/3-mouvement-de-rotation-uniforme

Remarque : la projection du mouvement sur l'axe Oy s'exprimerait sous la forme $x_m \sin(\omega t + \varphi)$.