L'opérateur gradient

I. Définition

Soit f un champ scalaire (fonction définie de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$), qui a un point M repéré par le vecteur position $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$ associe la valeur $f(M) = f(\vec{r})$.

exemple : champ de pression, champ de température.

On note $\mathrm{d}f$ la différentielle de f, qui représente la petite variation de la fonction f pour un déplacement élémentaire du point M :

$$\mathrm{d}f = f(M') - f(M) \text{ pour } M \text{ et } M' \text{ infiniment proches}$$

On note $\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{MM'}$, le déplacement élémentaire. Le gradient de f au point M est alors défini par :

$$\boxed{\mathrm{d}f(M) = \overrightarrow{\mathrm{grad}} f(M).\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}$$

Le gradient est donc un champ vectoriel qui caractérise les variations spatiales du champ scalaire f.

II. Propriétés :

Le vecteur gradient est perpendiculaire aux surfaces iso-f (définies par $f = Cte$).

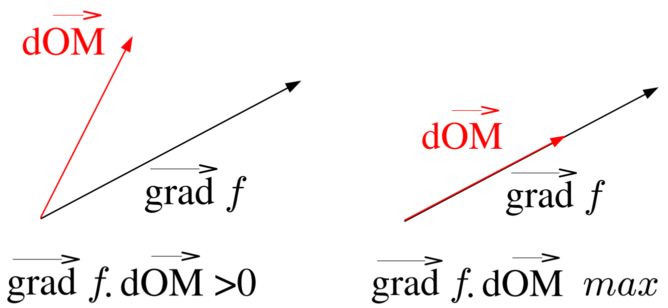
En effet, si on se déplace le long d'une surface $f = Cte$ alors $\mathrm{d}f = 0$ et donc $\overrightarrow{\mathrm{grad}} f.\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = 0$. On en déduit

$$\mathrm{d}\overrightarrow{OM} \perp \overrightarrow{\mathrm{grad}} f$$

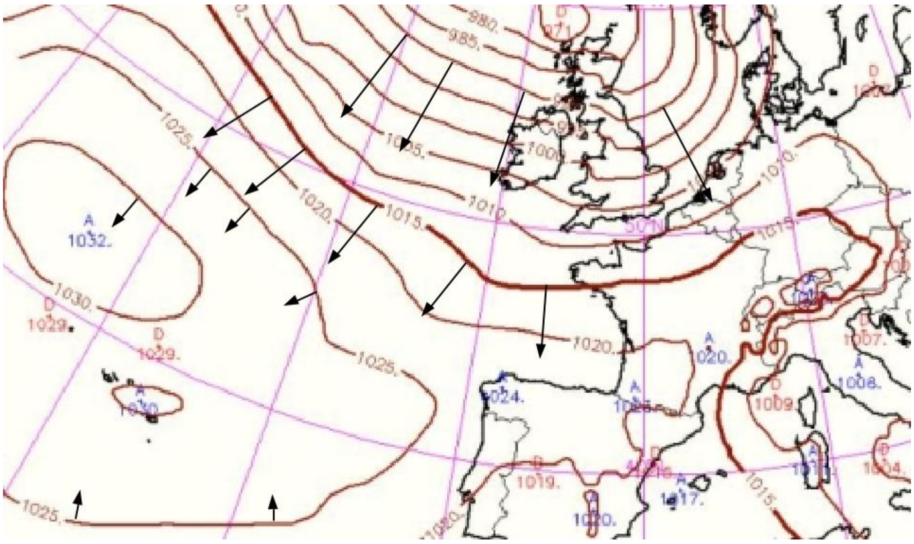
Le gradient est donc perpendiculaire aux surface iso-f.

Le gradient est orienté vers les valeurs de f croissantes.

En effet, si on se déplace dans le sens des valeurs de f croissantes alors $\mathrm{d}f > 0$. On en déduit $\overrightarrow{\mathrm{grad}} f.\mathrm{d}\overrightarrow{OM} > 0$. La variation élémentaire $\mathrm{d}f$ sera maximale lorsque $\mathrm{d}\overrightarrow{OM}$ sera colinéaire et de même sens que $\overrightarrow{\mathrm{grad}} f$.



Exemples à 2 dimensions :
– cartes IGN et lignes de niveau
– cartes météo et lignes isobares



III. Expressions :

• en coordonnées cartésiennes : $f(M) = f(x, y, z)$

On pose
$$\overrightarrow{\text{grad}} f = g_x \overrightarrow{u_x} + g_y \overrightarrow{u_y} + g_z \overrightarrow{u_z}$$
et on cherche à déterminer les expressions de g_x, g_y et g_z à partir de la définition du gradient :
$$\mathrm{d}f = \overrightarrow{\text{grad}} f . \mathrm{d}\overrightarrow{OM}$$
Or $\mathrm{d}f = f(x + \mathrm{d}x, y + \mathrm{d}y, z + \mathrm{d}z) - f(x, y, z) = \dfrac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \dfrac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y + \dfrac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z$
et $\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}x\, \overrightarrow{u_x} + \mathrm{d}y\, \overrightarrow{u_y} + \mathrm{d}z\, \overrightarrow{u_z}$ permet d'exprimer le produit scalaire
$$\overrightarrow{\text{grad}} f(M) . \mathrm{d}\overrightarrow{OM} = g_x\, \mathrm{d}x + g_y\, \mathrm{d}y + g_z\, \mathrm{d}z$$
En égalant les deux expressions $\mathrm{d}f = \dfrac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \dfrac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y + \dfrac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z = g_x \mathrm{d}x + g_y \mathrm{d}y + g_z \mathrm{d}z$
On en déduit
$$g_x = \frac{\partial f}{\partial x} \qquad g_y = \frac{\partial f}{\partial y} \qquad g_z = \frac{\partial f}{\partial z}$$
d'où
$$\boxed{\overrightarrow{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial x}\overrightarrow{u_x} + \frac{\partial f}{\partial y}\overrightarrow{u_y} + \frac{\partial f}{\partial z}\overrightarrow{u_z}}$$

• **en coordonnées cylindriques : $f(M) = f(r,\theta,z)$**

On procède de la même manière. On pose

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}} f = g_r \overrightarrow{u_r} + g_\theta \overrightarrow{u_\theta} + g_z \overrightarrow{u_z}$$

et on détermine les expressions de g_r, g_θ et g_z à partir de la définition du gradient :

$$\mathrm{d}f = \overrightarrow{\mathrm{grad}} f . \mathrm{d}\overrightarrow{OM}$$

Or $\mathrm{d}f = f(r+\mathrm{d}r, \theta+\mathrm{d}\theta, z+\mathrm{d}z) - f(r,\theta,z) = \dfrac{\partial f}{\partial r}\mathrm{d}r + \dfrac{\partial f}{\partial \theta}\mathrm{d}\theta + \dfrac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z$

et $\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}r\,\overrightarrow{u_r} + r\mathrm{d}\theta\,\overrightarrow{u_\theta} + \mathrm{d}z\,\overrightarrow{u_z}$ permet d'exprimer le produit scalaire

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}} f(M) . \mathrm{d}\overrightarrow{OM} = g_r\,\mathrm{d}r + g_\theta\,r\mathrm{d}\theta + g_z\,\mathrm{d}z$$

En égalant les deux expressions

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial r}\mathrm{d}r + \frac{\partial f}{\partial \theta}\mathrm{d}\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z = g_r\,\mathrm{d}r + g_\theta\,r\mathrm{d}\theta + g_z\,\mathrm{d}z$$

On en déduit

$$g_r = \frac{\partial f}{\partial r} \qquad r g_\theta = \frac{\partial f}{\partial \theta} \qquad g_z = \frac{\partial f}{\partial z}$$

d'où

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial r}\overrightarrow{u_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\overrightarrow{u_\theta} + \frac{\partial f}{\partial z}\overrightarrow{u_z}}$$

• **en coordonnées sphériques : $f(M) = f(r,\theta,\varphi)$**

On procède de la même manière. On pose

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}} f = g_r \overrightarrow{u_r} + g_\theta \overrightarrow{u_\theta} + g_\varphi \overrightarrow{u_\varphi}$$

et on détermine les expressions de g_r, g_θ et g_φ à partir de la définition du gradient :

$$\mathrm{d}f = \overrightarrow{\mathrm{grad}} f . \mathrm{d}\overrightarrow{OM}$$

Or $\mathrm{d}f = f(r+\mathrm{d}r, \theta+\mathrm{d}\theta, \varphi+\mathrm{d}\varphi) - f(r,\theta,\varphi) = \dfrac{\partial f}{\partial r}\mathrm{d}r + \dfrac{\partial f}{\partial \theta}\mathrm{d}\theta + \dfrac{\partial f}{\partial \varphi}\mathrm{d}\varphi$

et $\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}r\,\overrightarrow{u_r} + r\mathrm{d}\theta\,\overrightarrow{u_\theta} + r\sin\theta\mathrm{d}\varphi\,\overrightarrow{u_\varphi}$ permet d'exprimer le produit scalaire

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}} f(M) . \mathrm{d}\overrightarrow{OM} = g_r\,\mathrm{d}r + g_\theta\,r\mathrm{d}\theta + g_\varphi r\sin\theta\mathrm{d}\varphi$$

En égalant les deux expressions $\mathrm{d}f = \dfrac{\partial f}{\partial r}\mathrm{d}r + \dfrac{\partial f}{\partial \theta}\mathrm{d}\theta + \dfrac{\partial f}{\partial \varphi}\mathrm{d}\varphi = g_r\,\mathrm{d}r + g_\theta\,r\mathrm{d}\theta + g_\varphi r\sin\theta\mathrm{d}\varphi$

On en déduit

$$g_r = \frac{\partial f}{\partial r} \qquad r g_\theta = \frac{\partial f}{\partial \theta} \qquad g_\varphi r\sin\theta = \frac{\partial f}{\partial \varphi}$$

d'où

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial r}\overrightarrow{u_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\overrightarrow{u_\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\overrightarrow{u_\varphi}}$$