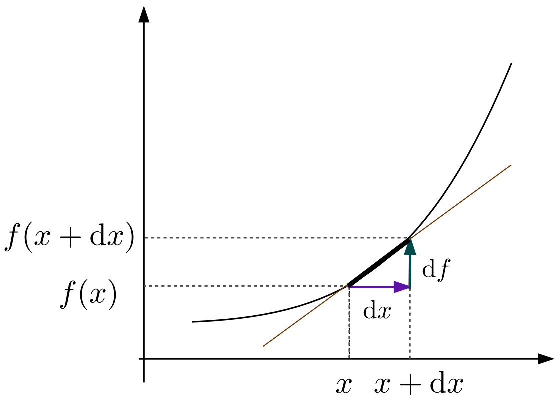
Différentielle d'une fonction de plusieurs variables

I. Dérivée d'une fonction à une variable



On considère tout d'abord une fonction à une variable :

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \lim_{\mathrm{d}x \to 0} \frac{f(x+\mathrm{d}x)-f(x)}{\mathrm{d}x}}$$

Lorsque $\mathrm{d}x \to 0$
$\mathrm{d}f = f(x+\mathrm{d}x) - f(x) = f'(x)\,\mathrm{d}x$

On note $f'(x) = \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ où $f'(x)$ représente la pente de la tangente à la courbe en x.

II. Dérivée d'une fonction à plusieurs variables

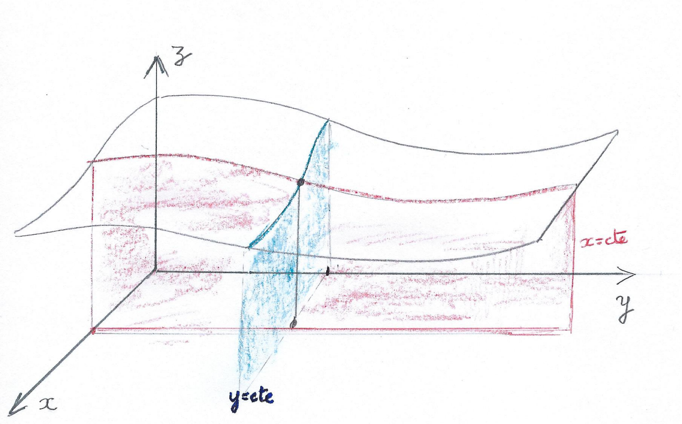
Considérons à présent une fonction à deux variables :

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & f(x,y) \end{array}$$

Exemples : $f(x,y) = x+y$
$f(x,y) = xy$

On peut représenter la fonction $f(x,y)$ par une surface telle que $z = f(x,y)$.

On définit les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ de la fonction f par rapport à x et par rapport à y par :



$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\mathrm{d}x \to 0} \frac{f(x+\mathrm{d}x,y)-f(x,y)}{\mathrm{d}x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\mathrm{d}y \to 0} \frac{f(x,y+\mathrm{d}y)-f(x,y)}{\mathrm{d}y}$$

On a alors pour $\mathrm{d}x \to 0$ et $\mathrm{d}y \to 0$

$$\boxed{\mathrm{d}f = f(x+\mathrm{d}x, y+\mathrm{d}y) - f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y}$$

$\mathrm{d}f$ est appelée différentielle de f.

Les calculs de différentielles suivent les mêmes règles que les calculs des dérivées :

$\mathrm{d}(f+g) = \mathrm{d}f + \mathrm{d}g$

$\mathrm{d}(fg) = g\,\mathrm{d}f + f\,\mathrm{d}g$

$\mathrm{d}\left(\dfrac{1}{f}\right) = -\dfrac{\mathrm{d}f}{f^2}$

Entraînez-vous :

$f(x,y) = ax+by$	$\dfrac{\partial f}{\partial x} =$	$\dfrac{\partial f}{\partial y} =$
$f(x,y) = xy$	$\dfrac{\partial f}{\partial x} =$	$\dfrac{\partial f}{\partial y} =$
$f(x,y) = x^y$	$\dfrac{\partial f}{\partial x} =$	$\dfrac{\partial f}{\partial y} =$
$f(x,t) = a\cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right]$	$\dfrac{\partial f}{\partial x} =$	$\dfrac{\partial f}{\partial t} =$