Formulaire d'analyse vectorielle

I. Définition intrinsèque des opérateurs gradient, divergence et rotationnel

I.1. Opérateur gradient

Soit $f(M)$ un champ scalaire : on appelle ***gradient*** de ce champ le champ vectoriel $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f$ tel que :

$$\mathrm{d}f(M) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f . \mathrm{d}\overrightarrow{OM}$$

Conséquence : Les lignes de champ de $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f$ sont orthogonales aux surfaces « iso-f »et orientées vers les valeurs de f croissantes.

Définition : Un champ vectoriel $\vec{A}(M)$ ***dérive du champ scalaire*** $f(M)$ si en tout point :

$$\vec{A}(M) = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f$$

Exemple : $\vec{F} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, E_P$ pour une force conservative.

I.2. Opérateur divergence

On admet le ***théorème d'Ostrogradski*** : soit $\vec{A}(M)$ un champ vectoriel : il existe un unique champ scalaire $\mathrm{div}\,\vec{A}$ tel que, pour toute surface fermée $\mathscr{S}$ limitant le volume $\mathscr{V}$:

$$\Phi = \oiint_{\mathscr{S}} \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iiint_{\mathscr{V}} \mathrm{div}\,\vec{A}\; \mathrm{d}V$$

Si on fait tendre le volume $\mathscr{V}$ vers 0, on obtient pour un volume élémentaire $\mathrm{d}V$:

$$\mathrm{d}\Phi = \mathrm{div}\,\vec{A}\,\mathrm{d}V$$

I.3. Opérateur rotationnel

On admet le ***théorème de Stokes*** : soit $\vec{A}(M)$ un champ vectoriel : il existe un unique champ vectoriel $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}$ tel que, pour toute surface $\mathscr{S}$ s'appuyant sur le contour fermé $\mathscr{C}$, $\mathscr{S}$ étant orientée par le sens de parcours choisi sur $\mathscr{C}$:

$$\mathcal{C} = \oint_{\mathscr{C}} \vec{A}.\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \iint_{\mathscr{S}} \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}.\mathrm{d}\vec{S}$$

Si on fait tendre la surface délimitée par le contour $\mathscr{C}$ vers 0, on obtient

$$\mathrm{d}\mathcal{C} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

Définition : Un champ vectoriel $\vec{B}(M)$ ***dérive du champ vectoriel*** $\vec{A}(M)$ si en tout point :

$$\vec{B}(M) = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}$$

I.4. Champs vectoriels à flux conservatif

On a toujours

$$\boxed{\mathrm{div}\,(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}) = 0}$$

$$\mathrm{div}\,\vec{B} = 0 \Longleftrightarrow \exists \vec{A} \text{ tel que } \vec{B} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}$$

$\vec{B}$ est alors à ***flux conservatif*** et dérive du ***potentiel vecteur*** $\vec{A}$.

I.5. Champs vectoriels à circulation conservative

On a toujours

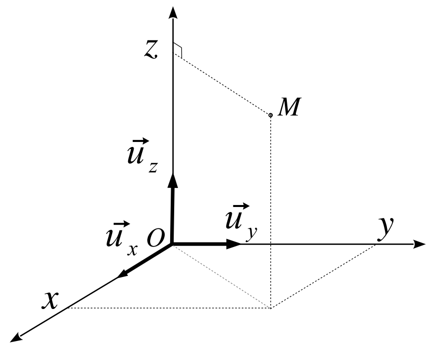
$$\boxed{\overrightarrow{\text{rot}}\,(\overrightarrow{\text{grad}}\,f) = \vec{0}}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A} = \vec{0} \Longleftrightarrow \exists f \text{ tel que } \vec{A} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,f$$

$\vec{A}$ est alors à ***circulation conservative*** et dérive du ***potentiel scalaire*** f.

II. Expressions dans les différents systèmes de coordonnées

II.1. Coordonnées cartésiennes (x, y, z)



– base : $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z})$

– vecteur position : $\overrightarrow{OM} = x\,\overrightarrow{u_x} + y\,\overrightarrow{u_y} + z\,\overrightarrow{u_z}$

– déplacement élémentaire : $\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}x\,\overrightarrow{u_x} + \mathrm{d}y\,\overrightarrow{u_y} + \mathrm{d}z\,\overrightarrow{u_z}$

On considère un champ scalaire $f(x, y, z)$ et un champ vectoriel $\vec{A} = A_x(x, y, z)\vec{u}_x + A_y(x, y, z)\vec{u}_y + A_z(x, y, z)\vec{u}_z$

- gradient : $\overrightarrow{\text{grad}}\,f = \dfrac{\partial f}{\partial x}\vec{u}_x + \dfrac{\partial f}{\partial y}\vec{u}_y + \dfrac{\partial f}{\partial z}\vec{u}_z$

- divergence : $\text{div}\,\vec{A} = \dfrac{\partial A_x}{\partial x} + \dfrac{\partial A_y}{\partial y} + \dfrac{\partial A_z}{\partial z}$

- rotationnel : $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A} = \left(\dfrac{\partial A_z}{\partial y} - \dfrac{\partial A_y}{\partial z}\right)\,\vec{u}_x + \left(\dfrac{\partial A_x}{\partial z} - \dfrac{\partial A_z}{\partial x}\right)\,\vec{u}_y + \left(\dfrac{\partial A_y}{\partial x} - \dfrac{\partial A_x}{\partial y}\right)\,\vec{u}_z$

Notation nabla :

On peut formellement écrire, en utilisant l'opérateur symbolique *nabla* (que l'on n'utilisera qu'en *coordonnées cartésiennes*) :

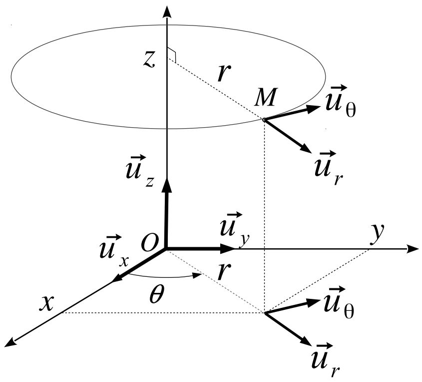
$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\,\vec{u}_x + \frac{\partial}{\partial y}\,\vec{u}_y + \frac{\partial}{\partial z}\,\vec{u}_z$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}\,f = \vec{\nabla}\,f$$

$$\text{div}\,\vec{A} = \vec{\nabla}\cdot\vec{A}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A} = \vec{\nabla}\wedge\vec{A}$$

II.2. Coordonnées cylindriques (r, θ, z)



– base : $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_z})$

– vecteur position : $\overrightarrow{OM} = r\,\overrightarrow{u_r} + z\,\overrightarrow{u_z}$

– déplacement élémentaire : $\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}r\,\overrightarrow{u_r} + r\mathrm{d}\theta\,\overrightarrow{u_\theta} + \mathrm{d}z\,\overrightarrow{u_z}$

On considère un champ scalaire $f(r,\theta,z)$ et un champ vectoriel $\vec{A} = A_r(r,\theta,z)\vec{u}_r + A_\theta(r,\theta,z)\vec{u}_\theta + A_z(r,\theta,z)\vec{u}_z$

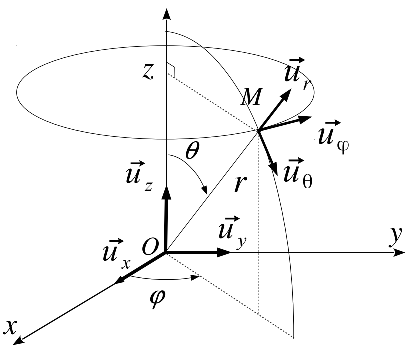
- gradient : $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f = \dfrac{\partial f}{\partial r}\vec{u}_r + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial f}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \dfrac{\partial f}{\partial z}\vec{u}_z$

- divergence : $\mathrm{div}\,\vec{A} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial (rA_r)}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \dfrac{\partial A_z}{\partial z}$

- rotationnel : $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A} = \left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial A_z}{\partial \theta} - \dfrac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\,\vec{u}_r + \left(\dfrac{\partial A_r}{\partial z} - \dfrac{\partial A_z}{\partial r}\right)\,\vec{u}_\theta + \dfrac{1}{r}\,\left(\dfrac{\partial\,(r\,A_\theta)}{\partial r} - \dfrac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\,\vec{u}_z$

II.3. Coordonnées sphériques (r, θ, φ)

– base : $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_\varphi})$



– vecteur position : $\overrightarrow{OM} = r\,\overrightarrow{u_r}$

– déplacement élémentaire :
$\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}r\,\overrightarrow{u_r} + r\mathrm{d}\theta\,\overrightarrow{u_\theta} + r\sin\theta\mathrm{d}\varphi\,\overrightarrow{u_\varphi}$

On considère un champ scalaire $f(r,\theta,\varphi)$ et un champ vectoriel $\vec{A} = A_r(r,\theta,\varphi)\vec{u}_r + A_\theta(r,\theta,\varphi)\vec{u}_\theta + A_\varphi(r,\theta,\varphi)\vec{u}_\varphi$

- gradient : $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f = \dfrac{\partial f}{\partial r}\vec{u}_r + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial f}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{u}_\varphi$

- divergence : $\mathrm{div}\,\vec{A} = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial (r^2 A_r)}{\partial r} + \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial (A_\theta \sin\theta)}{\partial \theta} + \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$

- rotationnel :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A} = \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial\,(A_\varphi \sin\theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi}\right)\vec{u}_r + \left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial\,(r\,A_\varphi)}{\partial r}\right)\vec{u}_\theta + \frac{1}{r}\,\left(\frac{\partial\,(r\,A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\vec{u}_\varphi$$

III. Action des opérateurs gradient, divergence, rotationnel sur les produits de champs

Produit de deux champs scalaires :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\,(f\,g) = f\,\overrightarrow{\text{grad}}\,g + g\,\overrightarrow{\text{grad}}\,f$$

Produits d'un champ scalaire et d'un champ vectoriel :

$$\text{div}\,(f\ \vec{A}) = f\,\text{div}\,\vec{A} + \vec{A}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\,f$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,(f\ \vec{A}) = f\,\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A} + \overrightarrow{\text{grad}}\,f\wedge\vec{A}$$

Produits de deux champs vectoriels :

$$\text{div}\,(\vec{A}\wedge\vec{B}) = \vec{B}\cdot\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A} - \vec{A}\cdot\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B}$$

IV. Les théorèmes utiles

Théorème d'Ostrogradski :

$$\oiint_{\mathscr{S}} \vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \iiint_{\mathscr{V}} \text{div}\,\vec{A}\ \mathrm{d}V$$

La surface fermée $\mathscr{S}$ étant orientée vers l'extérieur.

Remarque : on peut en déduire la *formule du gradient :*

$$\oiint_{\mathscr{S}} f\ \mathrm{d}\vec{S} = \iiint_{\mathscr{V}} \overrightarrow{\text{grad}}\,f\ \mathrm{d}V$$

Cette formule permet de retrouver que la résultante des forces de pression uniforme sur une surface fermée est nulle :

$$\oiint_{\mathscr{S}} -P_0\ \mathrm{d}\vec{S} = \iiint_{\mathscr{V}} -\overrightarrow{\text{grad}}\,P_0\ \mathrm{d}V = \vec{0}$$

Théorème de Stokes :

$$\oint_{\mathscr{C}} \vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell} = \iint_{\mathscr{S}} \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

L'orientation de la surface $\mathscr{S}$ se déduit de l'orientation du circuit $\mathscr{C}$ par la règle du tire bouchon (ou de la main droite).