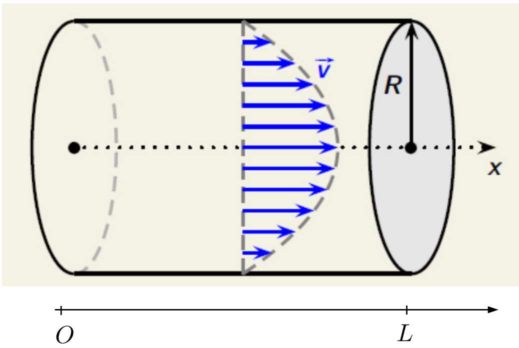
MF4 - Pertes de charges

I. Écoulement de Poiseuille dans une conduite cylindrique

I.1. Profil de vitesse

Un écoulement de Poiseuille est un écoulement laminaire stationnaire limité par des parois immobiles.
On considère ici l'écoulement stationnaire, homogène, d'un fluide visqueux à l'intérieur d'une conduite cylindrique horizontale de rayon R, d'axe Ox.
Le mouvement du fluide est provoqué par des dispositifs externes qui imposent une différence de pression entre l'entrée et la sortie du fluide.

– en $x = 0$ on impose une pression $P(0)$
– en $x = L$ la pression vaut $P(L) < P(0)$



On peut montrer que le profil des vitesses est parabolique :

$$\vec{v} = V_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \vec{u}_x$$

avec $V_0 = \dfrac{P(0) - P(L)}{4\eta L} R^2$ vitesse sur l'axe.

Remarque : si le fluide était parfait on n'observerait pas de chute de pression.
https://culturesciencesphysique.ens-lyon.fr/ressource/physique-animee-poiseuille.xml

I.2. Débit volumique, loi de Hagen-Poiseuille

On peut calculer le débit volumique à travers une section quelconque (l'écoulement étant stationnaire, homogène le débit volumique se conserve).

$$D_v = \iint_S \vec{v}.\mathrm{d}\vec{S} = \iint_S V_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \mathrm{d}S$$

$$D_v = \iint_S V_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \mathrm{d}r r \mathrm{d}\theta$$

$$D_v = V_0 \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^R V_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) r \mathrm{d}r$$

$$D_v = 2\pi V_0 \left(\frac{R^2}{2} - \frac{1}{R^2}\frac{R^4}{4}\right)$$

$$D_v = 2\pi V_0 \frac{R^2}{4}$$

$$D_v = \pi V_0 \frac{R^2}{2}$$

> On définit la **vitesse débitante** U à travers une conduite de section S par :
>
> $$D_v = SU$$

Dans le cas de l'écoulement de Poiseuille cylindrique :

$$D_v = SU = \pi R^2 U = \pi V_0 \frac{R^2}{2} \quad \text{d'où} \quad U = \frac{V_0}{2}$$

En remplaçant V_0 par son expression on obtient

$$D_v = \frac{(P(0) - P(L))\pi R^4}{8\eta L}$$

qui constitue la loi de Poiseuille (ou loi de Hagen-Poiseuille).

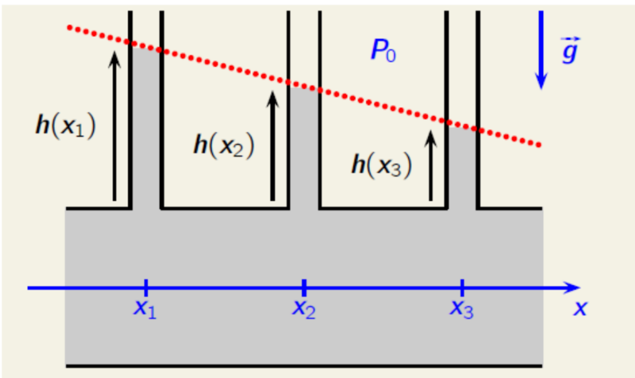
Commenter la variation du débit en fonction de R, η et L.
– D_v augmente proportionnellement à R^4 (donc plus vite que la surface qui elle augmente en proportionnellement à R^2). Les effets de viscosité sont plus importants sur les parois. Quand R augmente le rapport surface/volume diminue et les effets de la viscosité sont moindres.

– Quand $L \nearrow$ $D_v \searrow$.

– Quand $\eta \nearrow$ $D_v \searrow$.
On constate qu'il y a proportionnalité entre l'écart de pression et le débit volumique :

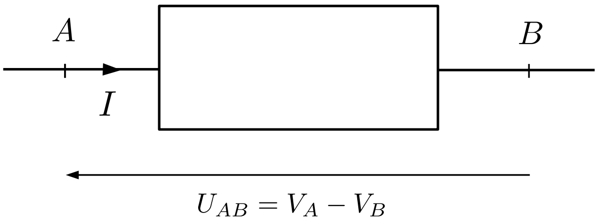
> La loi de Hagen-Poiseuille relie le débit volumique dans une canalisation de rayon R, de longueur L, à la différence de pression aux deux extrémités :
>
> $$D_v = \frac{\pi R^4}{8\eta L}(P(0) - P(L))$$

On considère un écoulement de Poiseuille dans une canalisation horizontale. La canalisation est percée de trois trous sur sa partie supérieure sur lesquels sont reliés trois tubes verticaux. En régime stationnaire, et pour un nombre de Reynolds inférieur à 2000, on observe que le liquide qui s'écoule dans la conduite principale occupe une partie des tubes verticaux, avec une surface libre immobile, à une hauteur de plus en plus faible au fur et à mesure que l'on avance dans la conduite. On vérifie que la pression décroît linéairement avec la distance.



I.3. Résistance hydraulique

On peut faire une analogie avec l'électricité : l'intensité I du courant électrique (c'est-à-dire le débit de charge) traversant une résistance R, soumise à une différence de potentiel $U_{AB} = V_A - V_B$ vérifie $U = V_A - V_B = RI$.



On peut définir une résistance hydraulique R_h en identifiant :

$$\begin{array}{ccc} I & \longleftrightarrow & D_v \\ V_A - V_B & \longleftrightarrow & P(0) - P(L) \\ R & \longleftrightarrow & R_h \end{array}$$

avec $R_h = \dfrac{P(0) - P(L)}{D_v} = \dfrac{8\eta L}{\pi R^4}$.

La résistance hydraulique augmente quand la longueur L et la viscosité η augmentent et diminue quand le rayon R augmente.

Dans le cas d'un écoulement de Poiseuille dans une conduite cylindrique horizontale de rayon R, la chute de pression $P(0) - P(L)$ sur une longueur L est proportionnelle au débit volumique :

$$P(0) - P(L) = R_h D_v$$

avec R_h résistance hydraulique : $R_h = \dfrac{8\eta L}{\pi R^4}$.

I.4. Transition vers la turbulence : nombre de Reynolds

On a jusqu'à présent considéré l'écoulement laminaire. En mécanique des fluides, on introduit le nombre sans dimension Re :

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho L U}{\eta}$$

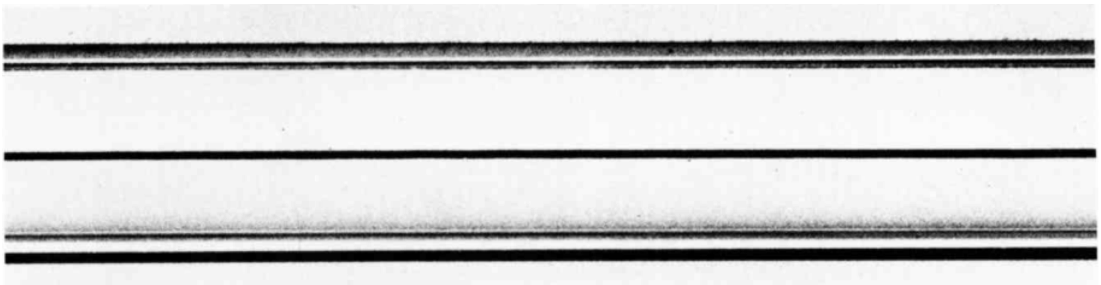
avec

- ρ la masse volumique du fluide
- L une dimension caractéristique de l'écoulement : pour un écoulement dans une conduite cylindrique, L correspond au diamètre de la conduite ; pour un écoulement autour d'une sphère, L correspond au diamètre de la sphère.
- U la vitesse caractéristique de l'écoulement
- η le coefficient de viscosité dynamique du fluide ($\nu = \frac{\eta}{\rho}$ est appelé coefficient de viscosité cinématique).

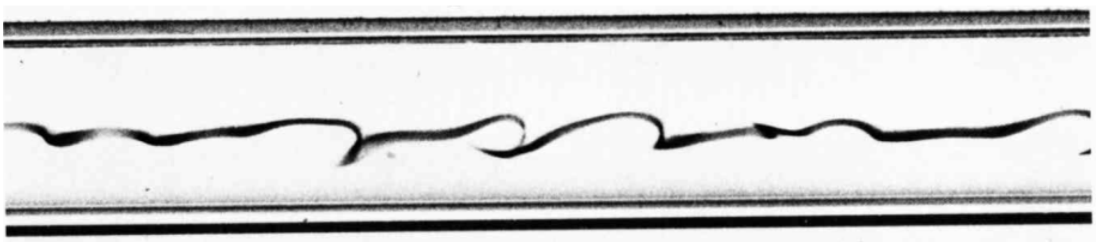
Ce nombre compare les temps de transport de quantité de mouvement diffusif (lié à la viscosité) et convectif (lié au déplacement des particules fluides) dans le fluide.

L'expérience historique d'Osborne Reynolds (1880) consistait à visualiser les lignes de courant dans un écoulement en conduite cylindrique en injectant un filet de colorant à l'entrée de la conduite. À section de conduite constante, le Re était alors contrôlé par la valeur du débit dans la conduite. Les figures ci-dessous rendent compte de l'évolution du régime d'écoulement lorsque le Re augmente (voir aussi la vidéo) :

- laminaire



- transitoire



- turbulent

Pour de faibles valeurs de Re, les lignes de courant (visualisées grâce au colorant) sont stationnaires, l'écoulement est laminaire. Il est décomposable en couches s'écoulant les unes sur les autres sans s'interpénétrer.
À grand Re, les lignes de courant ne sont plus identifiables, on observe un fort brassage transversalement à la direction de l'écoulement, le régime est turbulent.
Pour un Re intermédiaire, on observe une succession aléatoire entre des zones de régime laminaire et des « bouffées turbulentes », caractéristique d'un régime de transition entre laminaire et turbulent.

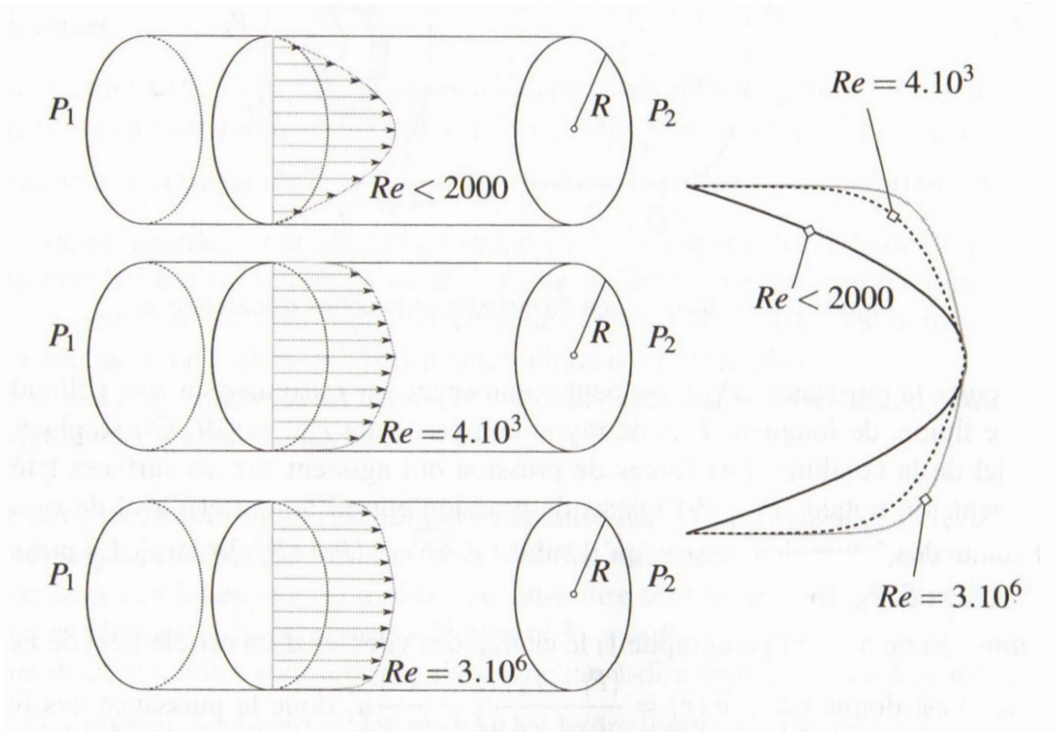
Projet Lutetium : Visualisation de la transition vers la turbulence :
https://www.youtube.com/watch?v=eD7LdS6bf0Q

Lien vers le site de l'ENS Lyon "La physique animée" (2min09s) :
http://culturesciencesphysique.ens-lyon.fr/ressource/physique-animee-Navier-Stokes.xml

Critère numérique : L'ordre de grandeur du nombre de Reynolds critique délimitant (grossièrement) les deux régimes est $\mathrm{Re}_c = 2000$.

Si $\mathrm{Re} < 2000$: l'écoulement est laminaire. Si $\mathrm{Re} > 2000$: l'écoulement est turbulent.

Profil des vitesses : Les lois analytiques établies pour les écoulements laminaires ne sont plus valables à grand nombre de Reynolds. L'écoulement étant turbulent il se produit localement des variations de vitesse aléatoires. Cependant, on peut encore définir un champ des vitesses et un profil de vitesse en effectuant des moyennes temporelles.
Dans une conduite cylindrique de section circulaire, le profil des vitesses n'est plus parabolique mais obéit à une loi empirique qui dépend de la valeur de Re.



Profils de vitesse selon le nombre de Reynolds.

Chute de pression : Lorsque l'écoulement dans une conduite est turbulent, la loi de Hagen-Poiseuille ne s'applique plus. Il n'existe plus de loi analytique pour déterminer la chute de pression entre l'entrée et la sortie de la canalisation. On peut alors utiliser des lois empiriques ou des abaques (voir ce qui suit sur les pertes de charges).

II. Modification de la relation de Bernoulli. Pertes de charge

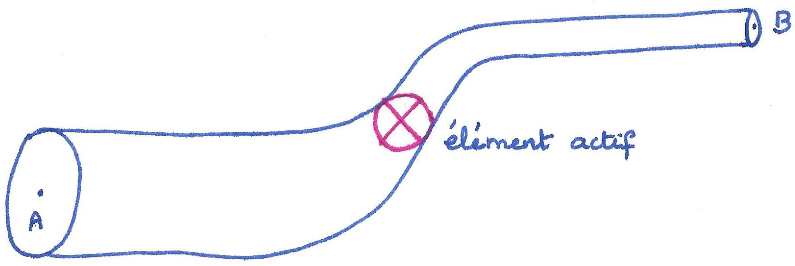
Soit un fluide en écoulement stationnaire, homogène ($\rho = cte$).

On considère un tube de courant compris entre les sections A et B et comportant désormais un élément actif (pompe ou turbine). On note $\mathscr{P}_u$ la puissance reçue par le fluide (unité SI : W) au niveau de l'élément actif et w_u l'énergie reçue par unité de masse de fluide (unité SI : J.kg^{-1}).

Pour une turbine : $\mathscr{P}_u < 0$, pour une pompe : $\mathscr{P}_u > 0$.

On note D_v le débit volumique et D_m le débit massique à travers une section du tube de courant. On a les relations :

$$D_m = \rho D_v$$
$$\mathscr{P}_u = D_m w_u$$



II.1. Expression générale

En reprenant le bilan enthalpique établi au chapitre précédent pour un écoulement parfait, stationnaire, homogène, mais en tenant compte désormais de l'élément actif, on peut écrire, en utilisant la relation $h_B - h_A = \frac{P_B - P_A}{\rho}$ valable pour un écoulement parfait homogène :

$$\frac{P_B - P_A}{\rho} + \frac{1}{2}(v_B^2 - v_A^2) + g(z_B - z_A) = w_u$$
$$\left[P_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2 + \rho g z_B\right] = \left[P_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 + \rho g z_A\right] + \rho w_u$$

Si on tient compte d'effets dissipatifs liés à la viscosité, on écrira :

$$\left[P_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2 + \rho g z_B\right] = \left[P_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 + \rho g z_A\right] - J + \rho w_u$$

avec $\rho w_u = \dfrac{D_m}{D_v} w_u = \dfrac{\mathscr{P}_u}{D_v}$.

On peut alors exprimer le **bilan en pression** (ou énergie volumique) :

$$\boxed{\left[P_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2 + \rho g z_B\right] = \left[P_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 + \rho g z_A\right] - J + \frac{\mathscr{P}_u}{D_v} \qquad (\text{ J.m}^{-3})}$$

J correspond aux **pertes de charge**. C'est une grandeur positive homogène à une pression ou une énergie volumique.

$$[J] = \text{ Pa} = \text{ J.m}^{-3}$$

J est également noté ΔP_C.

Il existe des formulations équivalentes de cette relation.

Lorsqu'on utilise des pompes, on préfère parfois raisonner sur des hauteurs.
On traduit alors la perte de charge en hauteur h_J de fluide (on parle alors de perte de charge manométrique) en posant

$$J = \rho g h_J$$

On peut alors, en divisant tous les termes par ρg, exprimer le bilan en **hauteur** :

$$\left[\frac{P_B}{\rho g} + \frac{v_B^2}{2g} + z_B\right] = \left[\frac{P_A}{\rho g} + \frac{v_A^2}{2g} + z_A\right] - h_J + h_u \qquad (\text{ m})$$

avec $h_u = \dfrac{\mathscr{P}_u}{D_m g} = \dfrac{w_u}{g}$ appelée hauteur de charge utile de la pompe.

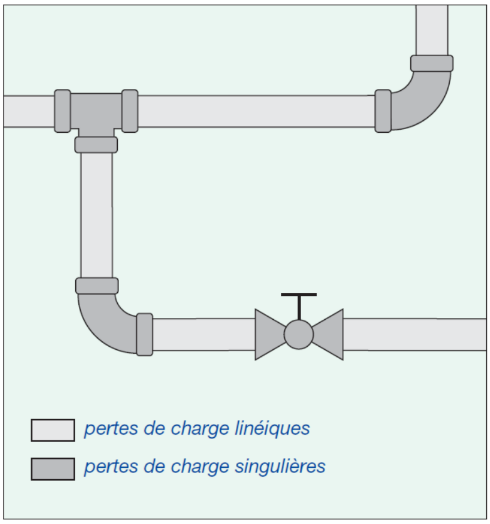
On peut également exprimer le bilan en **énergie massique** :

$$\left[\frac{P_B}{\rho} + \frac{1}{2}v_B^2 + g z_B\right] = \left[\frac{P_A}{\rho} + \frac{1}{2}v_A^2 + g z_A\right] - w_J + w_u \qquad (\text{ J.kg}^{-1})$$

Il vaut mieux apprendre la première relation et savoir en déduire les deux autres.

On distingue les pertes de charge :

- **linéiques ou régulières** : elles correspondent à l'écoulement le long des conduites.
- **singulières** : elles se manifestent sur les pièces spéciales qui modifient la direction ou la section de passage du fluide (raccord, T, vannes, soupapes, etc...).



II.2. Pertes de charge régulières

Elles dépendent :

- du type d'écoulement (laminaire ou turbulent) et donc du nombre de Reynolds
- de la rugosité des parois de la conduite :

La **rugosité absolue** représente l'épaisseur moyenne des aspérités de la surface du matériau constituant la conduite. On la note ε et on l'exprime en général en millimètres.
On définit la **rugosité relative** d'une conduite de diamètre D par le rapport ε/D.
Pour rendre compte des pertes énergétiques, on introduit un coefficient sans dimension f appelé coefficient de friction et tel que :

$$\boxed{J_{\text{reg}} = f\frac{L}{D}\rho\frac{U^2}{2}}$$

avec

— L la longueur de conduite,

— D le diamètre interne de la conduite,

— U la vitesse débitante ($D_v = SU$)

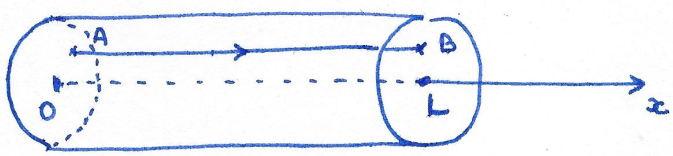
— ρ la masse volumique du fluide

— f coefficient de pertes de charges régulières ou coefficient de friction de la conduite (il est parfois noté λ ou Λ).

Vérifier l'homogénéité de la formule.

On peut vérifier que pour des faibles nombres de Reynolds : $f = \dfrac{64}{Re}$.

Démonstration :



Sur une ligne de courant $A \to B$ donnée, $z_A = z_B$ et $v_A = v_B$. En l'absence d'élément actif ($\mathscr{P}_u = 0$). La relation

$$\left[P_B + \cancel{\frac{1}{2}\rho v_B^2} + \cancel{\rho g z_B}\right] = \left[P_A + \cancel{\frac{1}{2}\rho v_A^2} + \cancel{\rho g z_A}\right] - J + \underbrace{\frac{\mathscr{P}_u}{D_v}}_{=0}$$

devient :

$P_B = P_A - J$

$P(L) = P(0) - J$

$$\boxed{J = P(0) - P(L)}$$

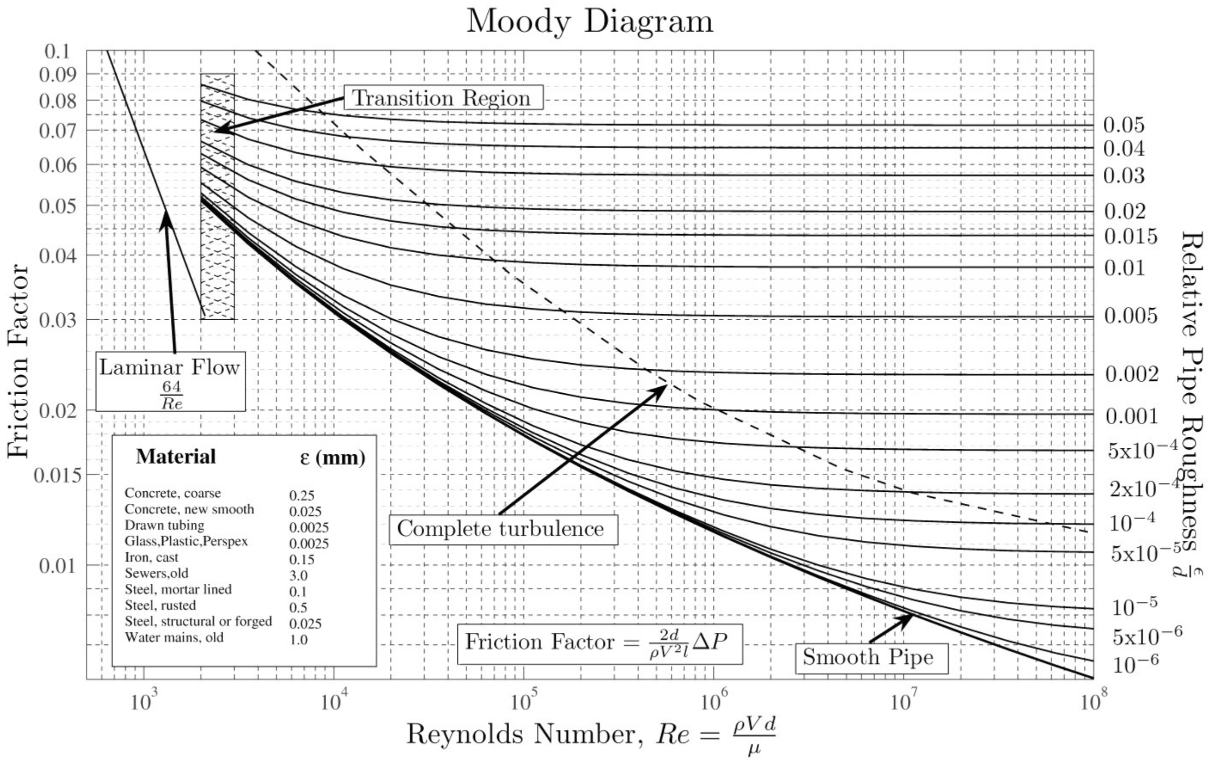
⇒ pour une conduite horizontale, de section constante, sans élément actif, la perte de charge correspond à la chute de pression.

Pour un écoulement laminaire on utilise la loi de Poiseuille : $J = P(0) - P(L) = \dfrac{8\eta \cancel{L} D_v}{\pi R^4} = f\dfrac{\cancel{L}}{D}\dfrac{1}{2}\rho U^2$

Or $D_v = SU = \pi R^2 U$ et $D = 2R$ d'où

$$f = \frac{16\eta\cancel{\pi}R^2UD}{\cancel{\pi}R^4\rho U^2} = \frac{16\eta D}{\rho R^2 U}$$
$$f = \frac{16\eta 2R}{\rho R^2 U} = \frac{32\eta}{\rho RU} = \frac{64\eta}{\rho DU} = \frac{64}{\mathrm{Re}}$$

Pour d'autres valeurs du nombre de Reynolds, il existe des lois empiriques. Le plus simple en général est de relever la valeur de f sur le diagramme de Moody qui présente des courbes donnant f en fonction de η pour différentes valeurs de rugosité relative.



- Pour $R_e < 2000$ on retrouve la valeur obtenue pour un écoulement laminaire avec $f = \frac{64}{\text{Re}}$ représentée par une droite de pente -1.
- Pour $2000 < R_e < 3000$ on est dans la zone de transition. Il n'y a pas de relation simple et le diagramme n'est pas utilisable dans cette région.
- La ligne inférieure en trait gras correspond au cas d'une conduite de rugosité négligeable ("smooth pipe").
- Au dessus de la courbe en pointillé, on peut considérer l'écoulement totalement turbulent : dans ce cas le coefficient f est indépendant du nombre de Reynolds et ne dépend plus que de la rugosité relative de la conduite. Dans cette zone l'écoulement est dit turbulent rugueux.

On pourra également lire une description du diagramme de Moody sur le site :
http://gpip.cnam.fr/ressources-pedagogiques-ouvertes/hydraulique/co/3grain_pertesChargeRegulieresTurbul
html

II.3. Pertes de charge singulières

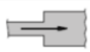
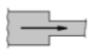
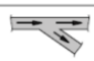
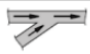
Des pertes de charges se produisent lorsque la section de conduite est modifiée, lorsque la conduite présente un coude, ou au niveau des accessoires tels que les vannes ou les robinets.

http://gpip.cnam.fr/ressources-pedagogiques-ouvertes/hydraulique/co/3grain_PertesChargeVariationsSectio
html

On définit le coefficient de perte de charge singulière singulière ξ par

$$J_{\text{sing}} = \xi \frac{1}{2} \rho U^2$$

ξ dépend de la forme de la singularité. Là encore les grandeurs sont tabulées.

	Diamètre du tube acier inox, cuivre ou plastique	8 ÷ 16 mm	18 ÷ 28 mm	30 ÷ 54 mm	> 54 mm
	Diamètre du tube acier	3/8" ÷ 1/2"	3/4" ÷ 1"	1 1/4" ÷ 2"	> 2"
Type de résistance singulière	**Symbole**				
Coude serré à 90° r/d = 1,5		2,0	1,5	1,0	0,8
Coude normal à 90° r/d = 2,5		1,5	1,0	0,5	0,4
Coude large à 90° r/d > 3,5		1,0	0,5	0,3	0,3
Coude serré en U r/d = 1,5		2,5	2,0	1,5	1,0
Coude normal en U r/d = 2,5		2,0	1,5	0,8	0,5
Coude large en U r/d > 3,5		1,5	0,8	0,4	0,4
Élargissement		1,0			
Restriction		0,5			
Dérivation simple avec T équerre		1,0			
Jonction simple avec T équerre		1,0			
Dérivation double avec T équerre		3,0			
Jonction double avec T équerre		3,0			
Dérivation simple avec angle incliné (45° - 60°)		0,5			
Jonction simple avec angle incliné (45° - 60°)		0,5			
Dérivation avec amorce		2,0			
Jonction avec amorce		2,0			

Description d'un fluide en écoulement en régime stationnaire	
Perte de charge singulière et régulière.	Modifier la relation de Bernoulli afin de tenir compte de la dissipation d'énergie mécanique par frottement.