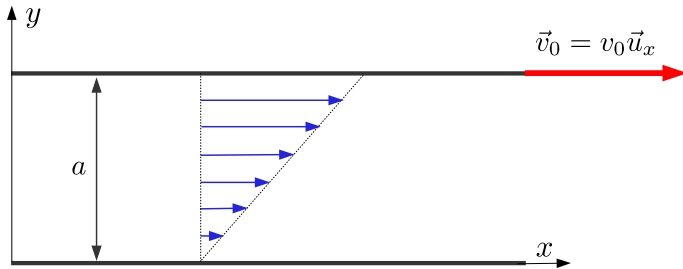


MF3 - Bilan énergétique d'écoulement de fluide parfait

I. Viscosité d'un fluide

I.1. Écoulement de Couette plan.

On considère un écoulement de Couette plan d'un fluide visqueux entre deux plaques parallèles : la plaque supérieure est entraînée à la vitesse $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_x$ et la plaque inférieure est fixe.



En régime stationnaire le profil des vitesses est de la forme :

$$\vec{v} = v_0 \frac{y}{a} \vec{u}_x$$

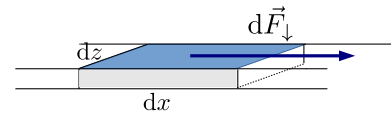
On peut considérer que l'écoulement est constitué de différentes couches de fluide qui glissent les unes par rapport aux autres sans se mélanger. L'écoulement est dit **laminaire**.

On remarque que le **fluide visqueux adhère aux parois** : la vitesse est nulle sur la plaque inférieure et égale à \vec{v}_0 sur la plaque supérieure.

Une couche de fluide donnée entraîne, par frottement, la couche inférieure moins rapide et freine la couche supérieure plus rapide.

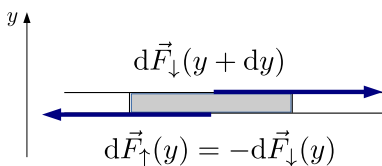
La force tangentielle à la surface qu'exerce la couche supérieure sur la couche inférieure au niveau d'un élément de surface $dS = dx dz$ a pour expression :

$$d\vec{F}_\downarrow = \eta \frac{\partial v_x}{\partial y} dS \vec{u}_x$$



avec η le coefficient de viscosité dynamique du fluide. Son unité SI est le poiseuille.

$$1 \text{ Pl} = 1 \text{ Pa}\cdot\text{s}$$



fluide	η (Pl)
air (1 bar, 20°C)	$1,8 \cdot 10^{-5}$
eau (20°C)	$1,0 \cdot 10^{-3}$
glycérine (20°C)	1,5

Valeurs de quelques coefficients de viscosité η

Au niveau microscopique, la viscosité est liée à la diffusion de quantité de mouvement. Par agitation thermique, les molécules passent d'une couche à l'autre. Lorsque les molécules plus rapides d'une couche supérieure passent à une couche inférieure elles augmentent la quantité de mouvement de la couche inférieure et l'entraînent. Inversement, lorsque les molécules moins rapides d'une couche inférieure passent à une couche supérieure elles diminuent la quantité de mouvement de la couche supérieure et la freinent.

Ce phénomène est totalement **irréversible**, comme tout type de frottement.

I.2. Écoulement parfait

À l'exception de l'hélium superfluide tous les fluides réels sont visqueux.

<https://www.youtube.com/watch?v=2Z6UJbwxBZI>

https://www.canal-u.tv/video/universite_de_tous_les_savoirs/la_superfluidite.1075

Cependant pour des fluides possédant des coefficients de viscosité faibles, la viscosité reste confinée dans une fine couche, appelée couche limite, près des parois de l'obstacle. En dehors de cette couche on peut considérer l'écoulement parfait et négliger tout phénomène diffusif.

Un écoulement est parfait lorsque

- la viscosité est nulle
- il n'y a pas de transfert thermique

On peut alors considérer que chaque particule fluide évolue de manière adiabatique réversible (donc isentropique).

II. Théorème de Bernoulli

II.1. Rappels de thermodynamique

Le premier principe de la thermodynamique appliqué aux systèmes ouverts fonctionnant en régime stationnaire s'exprime sous la forme :

$$(h_s - h_e) + \frac{1}{2}(v_s^2 - v_e^2) + g(z_s - z_e) = w_u + q$$

avec :

- h l'enthalpie massique
- $\frac{1}{2}v^2$ l'énergie cinétique macroscopique massique
- gz l'énergie potentielle massique (l'axe Oz étant orienté suivant la verticale ascendante)
- w_u le travail utile massique reçu par le fluide au niveau des pièces mobiles
- q le transfert thermique massique reçu

ou sous la forme équivalente :

$$D_m \left[(h_s - h_e) + \frac{1}{2}(v_s^2 - v_e^2) + g(z_s - z_e) \right] = \mathcal{P}_u + \mathcal{P}_{th}$$

avec :

- D_m le débit massique
- $\mathcal{P}_u = D_m w_u$ la puissance utile reçue par le fluide au niveau des pièces mobiles
- \mathcal{P}_{th} la puissance thermique utile reçue

L'enthalpie massique s'exprime sous la forme :

$$h = u + Pv$$

avec

- u l'énergie interne massique
- v le volume massique

On peut exprimer le volume massique en fonction de la masse volumique ρ :

$$v = \frac{V}{m} = \frac{1}{\rho} \text{ car } \rho = \frac{m}{V}, \text{ d'où}$$

$$h = u + \frac{P}{\rho}$$

II.2. Démonstration à partir de la thermodynamique

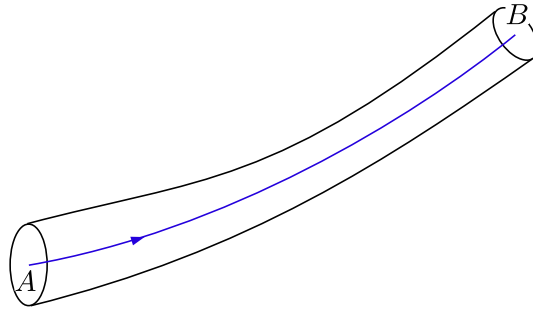
On suppose :

- l'écoulement parfait, stationnaire et homogène (le champ de masse volumique est uniforme $\rho = cte$)
- on oriente l'axe Oz suivant la verticale ascendante
- on suppose que, dans la zone d'écoulement considérée, le fluide ne traverse pas de dispositif comportant de partie mobile (compresseur, turbine...)

L'écoulement étant stationnaire, il y a conservation du débit massique à travers toute section de tube de courant. Le fluide étant homogène il y a conservation du débit volumique à travers toute section de tube de courant (avec $D_m = \rho D_v$).

Soit une ligne de courant allant d'un point A à un point B . L'écoulement étant stationnaire, cette ligne de courant coïncide avec la trajectoire des particules fluides allant de A à B .

On considère un tube élémentaire de courant entourant la ligne de courant joignant les points A et B . Sa section est suffisamment faible pour que l'on puisse considérer la pression et la vitesse uniforme sur chaque section d'entrée et de sortie.



Le premier principe de la thermodynamique appliqué aux systèmes ouverts fonctionnant en régime stationnaire s'exprime sous la forme :

$$(h_B - h_A) + \frac{1}{2}(v_B^2 - v_A^2) + g(z_B - z_A) = w_u + q \quad (\text{E})$$

- ▷ L'écoulement étant parfait, entre les points A et B le fluide ne reçoit aucun transfert thermique : $q = 0$.
- ▷ On considère qu'entre A et B le fluide ne traverse pas de dispositif comportant de parties mobiles : $w_u = 0$.
- ▷ On peut exprimer l'identité thermodynamique pour l'enthalpie massique associée à chaque particule fluide (voir cours Th7 II.5) :

$$dh = Tds + v dP$$

avec s l'entropie massique et v le volume massique.

Pour un écoulement parfait, chaque particule fluide subit une transformation adiabatique réversible. On a donc

$$ds = 0$$

On en déduit

$$dh = v dP = \frac{dP}{\rho} \quad \text{car } v = \frac{1}{\rho}$$

ce qui permet de relier la variation d'enthalpie $h_B - h_A$ à la variation de pression $P_B - P_A$ entre A et B :

$$h_B - h_A = \frac{P_B - P_A}{\rho} \quad \text{car } \rho = cte$$

On reporte dans (E) :

$$\frac{P_B - P_A}{\rho} + \frac{1}{2}(v_B^2 - v_A^2) + g(z_B - z_A) = 0$$

$$\frac{P_B}{\rho} + \frac{1}{2}v_B^2 + gz_B = \frac{P_A}{\rho} + \frac{1}{2}v_A^2 + gz_A$$

ou de manière équivalente

$$P_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2 + \rho g z_B = P_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 + \rho g z_A$$

II.3. Énoncé du théorème de Bernoulli

Pour un écoulement **parfait, stationnaire, homogène** ($\rho = \text{cte}$ dans tout le fluide), on peut écrire, en l'absence de pièces mobiles (turbines, pompes), **le long d'une ligne de courant**

$$P + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g z = C(\mathcal{L})$$

avec $C(\mathcal{L})$ une constante attachée à la ligne de courant considérée.

II.4. Interprétation énergétique

- $\frac{1}{2}\rho v^2$ énergie cinétique volumique
- $\rho g z$ énergie potentielle volumique
- P est homogène à une énergie volumique

La grandeur $P + \rho g z$ est appelée pression statique et le terme $\frac{1}{2}\rho v^2$ est appelé pression dynamique.

Pour une démonstration du théorème de Bernoulli à partir du théorème de l'énergie mécanique voir vidéo (5min09s) :

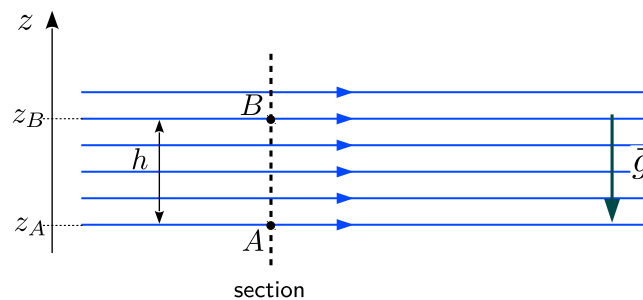
<http://culturesciencesphysique.ens-lyon.fr/ressource/physique-animee-Bernoulli.xml>

II.5. Une propriété utile

On considère un écoulement parfait, stationnaire, de champ de masse volumique uniforme ($\rho = \text{cte}$) à lignes de courant de direction fixe parallèle à \vec{u}_x . On peut montrer que dans une section perpendiculaire aux lignes de courant la pression suit la loi de l'hydrostatique.

$$P + \rho g z = \text{cte}$$

La constante dépend a priori de la section considérée.



En régime stationnaire les lignes de courant sont confondues avec les trajectoires des particules fluides. Les particules fluides se déplacent donc parallèlement à \vec{u}_x . Le principe fondamental de la dynamique appliqué à une particule fluide de volume dV dans le référentiel terrestre supposée galiléen donne :

$$\rho dV \vec{a} = -\overrightarrow{\text{grad}} P dV + \rho dV \vec{g} \quad (\text{pas de force de viscosité})$$

$$\rho \vec{a} = -\overrightarrow{\text{grad}} P + \rho \vec{g}$$

avec $\vec{a} // \vec{u}_x$.

On projette sur \vec{u}_z

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial z} - \rho g$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} + \rho g = 0$$

D'où, en intégrant par rapport à z dans une section x donnée :

$$P + \rho g z = \text{cte}$$

avec a priori cte qui dépend de x .

Dans une section verticale donnée, la pression suit la loi de l'hydrostatique. Ainsi :

$$P_A + \rho g z_A = P_B + \rho g z_B$$

$$P_A = P_B + \rho g (z_B - z_A) = P_B + \rho g h$$

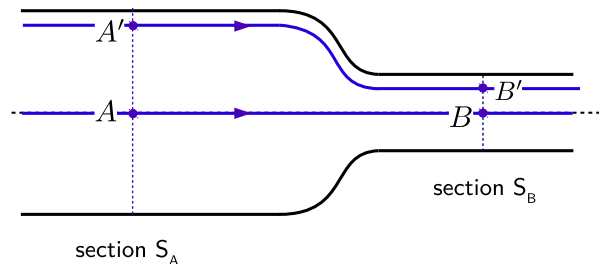
III. Applications

On suppose dans toute cette partie que les conditions d'application du théorème de Bernoulli sont vérifiées. On considère un écoulement parfait, stationnaire, homogène ($\rho = cte$) en l'absence de dispositif comportant des pièces mobiles.

III.1. Effet Venturi

a) Principe

On considère l'écoulement représenté ci-dessous. L'écoulement étant stationnaire homogène ($\rho = cte$). Le débit massique D_m et le débit volumique D_v se conservent à travers toute section d'un tube de courant.



– Conservation du débit volumique

On suppose la vitesse uniforme et perpendiculaire à chacune des sections A et B . La conservation du débit volumique entraîne :

$$D_v = S_A v_A = S_B v_B$$

$$v_B = \frac{S_A}{S_B} v_A$$

Si $S_B < S_A$ alors $v_B > v_A$. Le resserrement des lignes de courant entraîne une augmentation de la vitesse d'écoulement.

La grandeur $P + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g z$ étant conservée sur une ligne de courant, on aura, à z fixé (donc à énergie potentielle de pesanteur constante) :

$$P \searrow \quad \text{si} \quad v \nearrow$$

le resserrement des lignes de courant s'accompagne donc d'une diminution de pression.

– Calcul de la dépression

On considère la ligne de courant allant de A à B . D'après le théorème de Bernoulli :

$$P_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2 + \rho g z_B = P_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 + \rho g z_A$$

$$P_B = P_A + \frac{1}{2}\rho(v_A^2 - v_B^2)$$

$$P_B = P_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 \underbrace{\left(1 - \left(\frac{S_A}{S_B}\right)^2\right)}_{<0} < P_A$$

On observe donc bien une dépression au niveau du resserrement de conduite.

$$P_A - P_B = \frac{1}{2}\rho v_A^2 \left(\left(\frac{S_A}{S_B}\right)^2 - 1 \right)$$

Application numérique : $S_A = 10 \text{ cm}^2$; $S_B = 2 \text{ cm}^2$; $v_A = 2 \text{ m.s}^{-1}$; $\rho = 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$.

$$P_A - P_B = \frac{1}{2} \times 10^3 \times 4 \times (5^2 - 1) = 2 \times 24 \times 10^3 = 48.10^3 \text{ Pa} = 0,48 \text{ bar}$$

On considère à présent une autre ligne de courant allant de A' à B' . D'après le théorème de Bernoulli :

$$P_{B'} + \frac{1}{2}\rho v_{B'}^2 + \rho g z_{B'} = P_{A'} + \frac{1}{2}\rho v_{A'}^2 + \rho g z_{A'}$$

en reprenant les calculs précédent on obtient puisque $v_{A'} = v_A$ et $v_{B'} = v_B$:

$$P_{A'} = P_{B'} + \frac{1}{2}\rho(v_B^2 - v_A^2) + \rho g(z_{B'} - z_{A'})$$

$$P_{A'} - P_{B'} = \frac{1}{2}\rho v_A^2 \left(\left(\frac{S_A}{S_B} \right)^2 - 1 \right) + \rho g(z_{B'} - z_{A'}) = P_A - P_B + \rho g(z_{B'} - z_{A'})$$

On peut évaluer l'ordre de grandeur du deuxième terme :

Les rayons respectifs des sections A et B valent respectivement

$$r_A = \sqrt{\frac{S_A}{\pi}} = 1,8 \text{ cm} \quad \text{et} \quad r_B = \sqrt{\frac{S_B}{\pi}} = 0,8 \text{ cm}$$

On peut donc évaluer l'ordre de grandeur du terme $|z_{B'} - z_{A'}|$ à 1 cm.

$$|\rho g(z_{B'} - z_{A'})| = 10^3 \cdot 10 \cdot 10^{-2} = 10^2 \text{ Pa.}$$

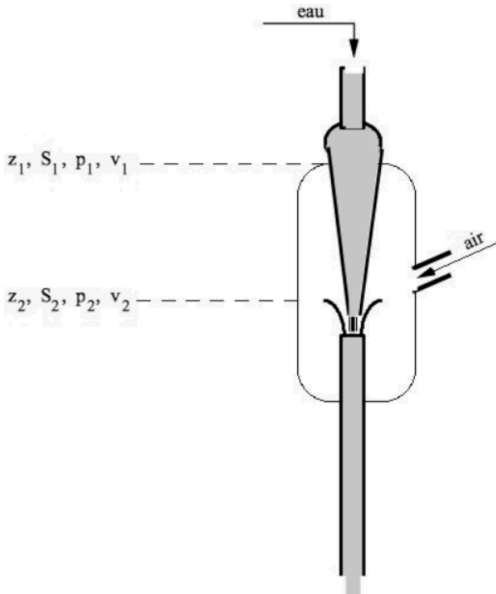
Ce terme est nettement négligeable devant $P_A - P_B = \frac{1}{2}\rho v_A^2 \left(\left(\frac{S_A}{S_B} \right)^2 - 1 \right) = 4,8 \cdot 10^4 \text{ Pa}$

On peut donc considérer $P_{A'} - P_{B'} \simeq P_A - P_B$.

Les différences de pression dues à la différence d'altitude peuvent en général être négligées devant celles liées à la variation d'énergie cinétique.

b) Quelques applications

- Trompe à eau



Dans une trompe à l'eau, utilisée comme pompe aspirante en chimie, un resserrement du conduit provoque une augmentation de la vitesse d'écoulement de l'eau entraînant une diminution de la pression.

La conservation du débit volumique donne

$$D_v = S_1 v_1 = S_2 v_2$$

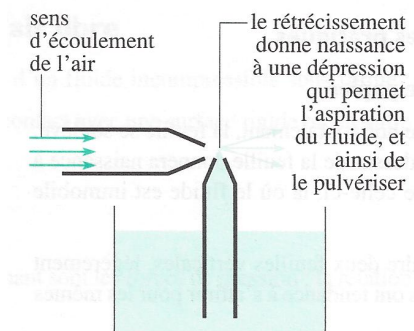
La relation de Bernoulli appliquée sur une ligne de courant allant d'un point de la section 1 à un point de la section 2 donne

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g z_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g z_2$$

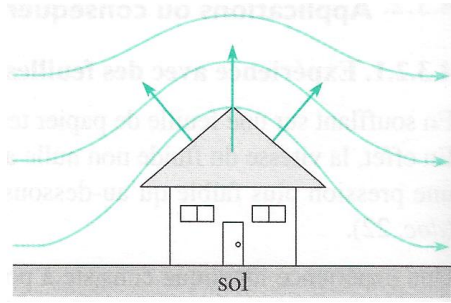
$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2) + \underbrace{\rho g(z_2 - z_1)}_{\text{négligeable}}$$

$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho D_v^2 \left(\frac{1}{S_2^2} - \frac{1}{S_1^2} \right)$$

- Principe d'un vaporisateur



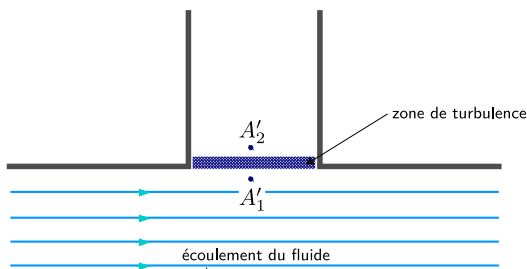
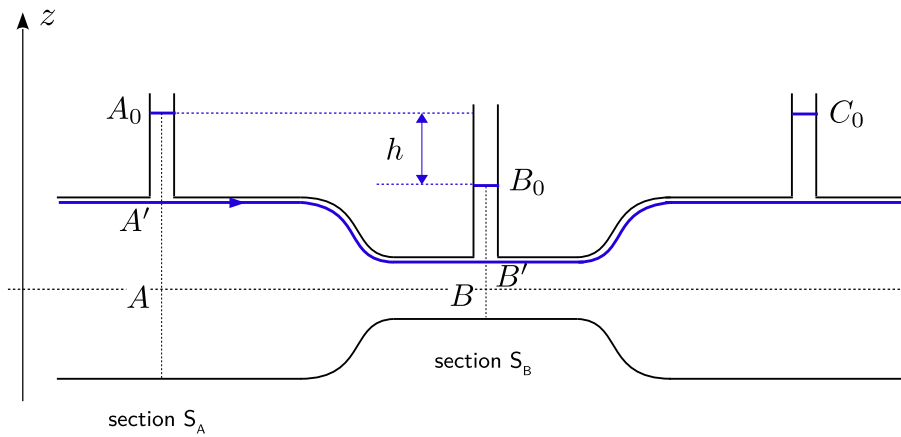
- Soulèvement d'un toit



III.2. Mesure d'un débit avec un tube de Venturi

Le tube de Venturi est utilisé pour créer une dépression au niveau d'un rétrécissement de canalisation. Il permet la mesure de débit.

On suppose les tubes de prise de pression placés suffisamment loin des changements de section pour que la vitesse puisse être considérée comme uniforme dans chaque section. On note v_A la vitesse du fluide dans la section A et v_B la vitesse dans la section B . Soit P_0 la pression atmosphérique qui s'exerce sur l'extrémité ouverte des tubes.



Prise de pression latérale :

l'expérience montre que lorsque le diamètre du tube latéral a des dimensions faibles par rapport au diamètre de la conduite l'écoulement n'est pas perturbé : il y a continuité des pressions $P(A') = P(A'_1) = P(A'_2)$ avec $P(A'_1)$ pression dans le fluide en écoulement et $P(A'_2)$ pression dans le fluide au repos.

On considère la ligne de courant allant du point A' au point B' . D'après le théorème de Bernoulli :

$$P_{A'} + \frac{1}{2}\rho v_A^2 + \rho g z_{A'} = P_{B'} + \frac{1}{2}\rho v_B^2 + \rho g z_{B'}$$

$$P_{A'} - P_{B'} = \frac{1}{2}\rho(v_B^2 - v_A^2) + \rho g(z_{B'} - z_{A'}) \quad (1)$$

Dans chaque tube latéral, le fluide est au repos. On peut appliquer la loi de l'hydrostatique :

$$\begin{cases} P_{A'} = P_{A_0} + \rho g(z_{A_0} - z_{A'}) & (2) \\ P_{B'} = P_{B_0} + \rho g(z_{B_0} - z_{B'}) & (3) \end{cases}$$

avec $P_{A_0} = P_{B_0} = P_0$ pression atmosphérique.

D'où, en calculant (2) - (3) :

$$P_{A'} - P_{B'} = \rho g(z_{A_0} - z_{A'}) - \rho g(z_{B_0} - z_{B'})$$

$$P_{A'} - P_{B'} = \rho g(z_{A_0} - z_{B_0}) - \rho g(z_{A'} - z_{B'})$$

$$P_{A'} - P_{B'} = \rho gh - \rho g(z_{A'} - z_{B'})$$

On reporte dans (1) :

$$\rho gh - \rho g(z_{A'} - z_{B'}) = \frac{1}{2}\rho(v_B^2 - v_A^2) + \rho g(z_{B'} - z_{A'})$$

$$gh = \frac{1}{2}v_A^2 \left(\left(\frac{S_A}{S_B} \right)^2 - 1 \right)$$

$$v_A = \sqrt{\frac{2gh}{\left(\frac{S_A}{S_B} \right)^2 - 1}}$$

On peut en déduire le débit volumique $D_v = S_A v_A$:

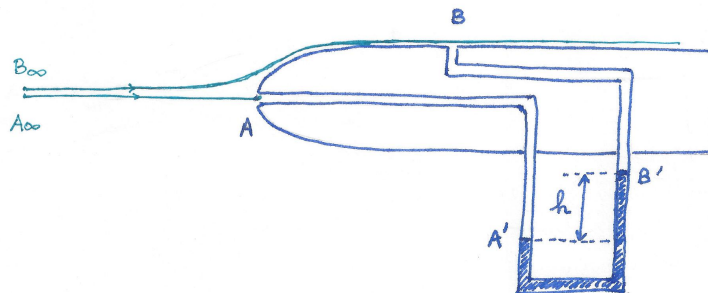
$$D_v = S_A \sqrt{\frac{2gh}{\left(\frac{S_A}{S_B} \right)^2 - 1}}$$

Remarque : Lorsqu'on considère l'écoulement d'un liquide, il faut que la valeur de la pression minimale de l'étranglement soit supérieure à la pression de vapeur saturante du liquide à la température T considérée. Sinon, il se produit le phénomène de cavitation : des bulles de vapeur se forment sur les parois. La continuité de l'écoulement n'est plus assurée et la relation de Bernoulli telle que nous l'avons formulée n'est plus applicable car le fluide n'est plus homogène.

III.3. Mesure d'une vitesse avec un tube de Pitot

On se place dans le référentiel lié à l'avion. On note

- $v = v_\infty$ la vitesse de l'écoulement loin du tube
- $P_0 = P_\infty$ la pression loin du tube
- ρ_a la masse volumique de l'air (supposée uniforme)
- ρ_ℓ la masse volumique du liquide utilisé dans le manomètre.



On peut considérer l'écoulement parfait, stationnaire, homogène. On applique le théorème de Bernoulli :

▷ Ligne de courant $A_\infty A$

$$P_0 + \frac{1}{2}\rho_a v^2 + \rho_a g z_{A_\infty} = P_A + \frac{1}{2}\rho_a v_A^2 + \rho_a g z_A$$

— le point A constitue un **point d'arrêt** de l'écoulement $\Rightarrow v_A = 0$

— $z_{A_\infty} = z_A$

D'où

$$P_A = P_0 + \frac{1}{2}\rho_a v^2$$

▷ Ligne de courant $B_\infty B$

$$P_0 + \frac{1}{2}\rho_a v^2 + \rho_a g z_{B_\infty} = P_B + \frac{1}{2}\rho_a v_B^2 + \rho_a g z_B$$

– le tube de Pitot a une section réduite et l'écoulement se déroule en milieu ouvert : on peut considérer que la vitesse d'écoulement est quasiment inchangée entre B_∞ et B :

$$v_B = v = v_\infty$$

$$P_B = P_0 + \underbrace{\rho_a g(z_{B_\infty} - z_B)}_{\text{négligeable}}$$

$$P_B = P_0$$

Compte-tenu de la faible dimension du tube, on néglige les effets de la pesanteur sur la variation de pression.

▷ Mesure de la différence de pression.

Dans un gaz, sur des échelles très petites devant $H = 8 \text{ km}$ on peut négliger les variations de pression avec l'altitude. On peut donc considérer :

$$P_{A'} \simeq P_A$$

$$P_{B'} \simeq P_B$$

Le liquide est au repos. On peut donc en déduire

$$P_{A'} = P_{B'} + \rho_l g h$$

Or $P_{A'} = P_A$ et $P_{B'} = P_B = P_0$ d'où

$$P_A = P_0 + \rho_l g h$$

En égalant les deux expressions de P_A :

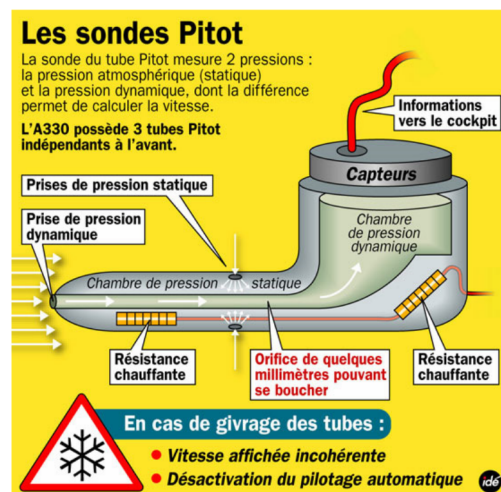
$$P_A = P_0 + \rho_l g h = P_0 + \frac{1}{2}\rho_a v^2$$

$$v^2 = \frac{2\rho_l g h}{\rho_a}$$

$$v = \sqrt{\frac{2\rho_l g h}{\rho_a}}$$



Source : <http://www.pilote-virtuel.com> / Auteur photo Jujug



On peut également suivre la démonstration sur les sites :

<https://www.youtube.com/watch?v=kXKpl1tYP4vc>

<https://www.youtube.com/watch?v=HFrB4GaXMD0>

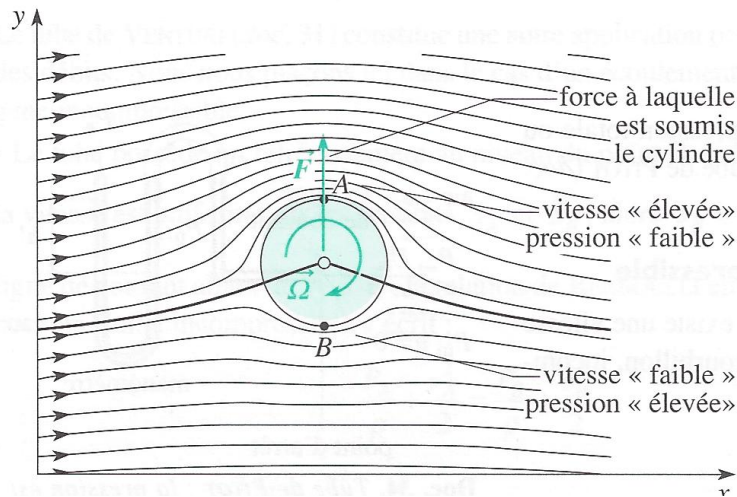
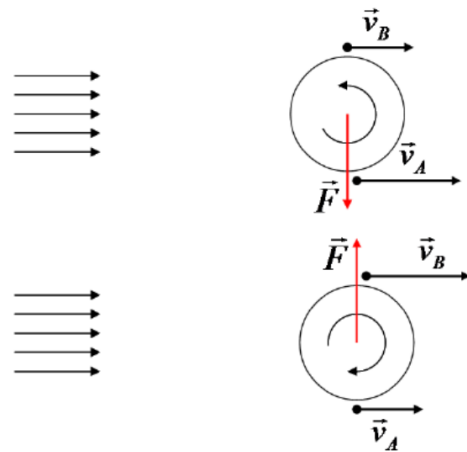
III.4. Effet Magnus

On considère une balle de tennis, ou un ballon de football lancé avec de l'effet, c'est-à-dire avec une rotation propre.

On se place dans le référentiel d'origine G , le centre de masse de la balle, et d'axes parallèles à ceux du référentiel terrestre. Dans ce référentiel, G est fixe, la balle présente un mouvement de rotation et est plongée dans un écoulement de vitesse \vec{v} égale à l'opposé de la vitesse de la balle par rapport au référentiel terrestre.

Sur le schéma du haut, la rotation de la balle entraîne le fluide en A et le freine en B en raison des effets de viscosité se produisant au voisinage de la balle (au niveau de la couche limite). La vitesse du fluide augmente en A et diminue en B . D'après le théorème de Bernoulli, la pression est donc plus faible en A qu'en B : on s'attend à une force vers le bas.

Le phénomène inverse se produit sur le schéma du bas : on obtient un force vers le haut (balle liftée).



EFFET MAGNUS : schéma des lignes de courant autour d'un cylindre en rotation

coup franc de Platini (3min16) :

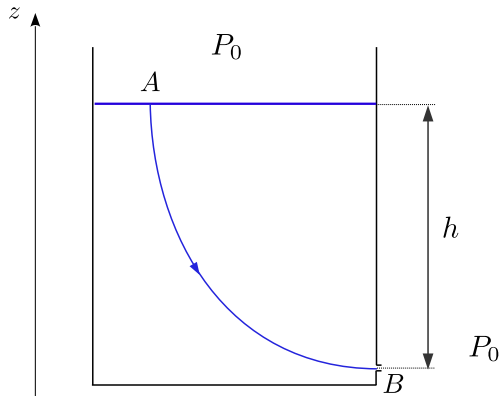
<https://www.ina.fr/video/I00008603>

effet Magnus sur un ballon de basket :

<https://www.youtube.com/watch?v=2OSrvzNW9FE>

III.5. Vidange d'un réservoir : formule de Torricelli

On considère un récipient cylindrique, de section S , rempli d'un fluide de masse volumique ρ , pouvant s'écouler par un orifice de section s percé à une hauteur h au dessous de la surface libre. On note P_0 la pression atmosphérique.



On suppose

$$s \ll S$$

L'écoulement est lent. On suppose le régime stationnaire. On considère que la hauteur de fluide h ne varie quasiment pas à l'échelle de temps de mesure de la vitesse v_B .

L'écoulement est parfait, stationnaire, homogène. Il existe une ligne de courant joignant le point A de la surface à un point B de l'orifice.

On applique le théorème de Bernoulli sur la ligne AB avec $P_A = P_B = P_0$:

$$P_0 + \rho g z_A + \frac{1}{2} \rho v_A^2 = P_0 + \rho g z_B + \frac{1}{2} \rho v_B^2$$

Par conservation du débit volumique :

$$S v_A = s v_B$$

$$v_B^2 = \left(\frac{S}{s}\right)^2 v_A^2 \gg v_A^2$$

On néglige v_A^2 devant v_B^2 .

$$\frac{1}{2} \rho v_B^2 = \rho g (z_A - z_B)$$

$$\frac{1}{2} v_B^2 = gh$$

$$v_B = \sqrt{2gh}$$

- ▷ On retrouve la vitesse atteinte après une chute libre d'une hauteur h .
- ▷ Le résultat est indépendant de la masse volumique du liquide.

On peut également suivre la démonstration sur le site :

<https://www.youtube.com/watch?v=xhUPPimVgjM>

Description d'un fluide en écoulement en régime stationnaire	
Énergétique des écoulements parfaits dans une conduite	Définir un écoulement parfait. Énoncer, à l'aide d'un bilan d'énergie, la relation de Bernoulli en précisant les hypothèses. Établir un bilan de puissance pour un circuit hydraulique ou pneumatique avec ou sans pompe.