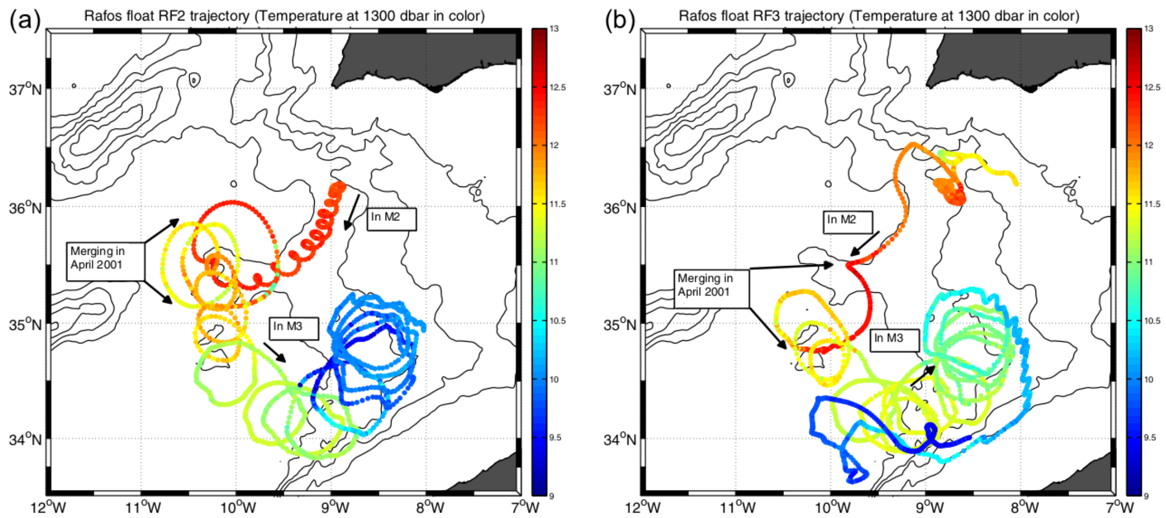
MF2 - Description d'un fluide en écoulement

I. Champs eulériens

I.1. Les deux points de vue

a) Description lagrangienne

Cette description consiste à suivre dans son mouvement chaque particule fluide.

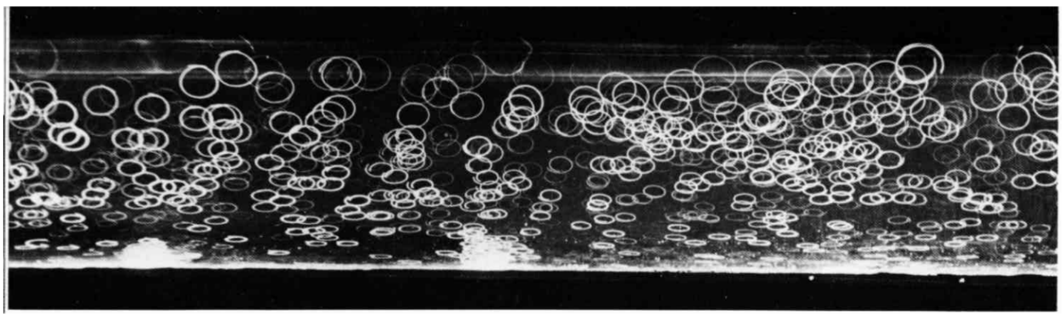


Suivi de deux bouées dérivantes en baie de Cadix (la couleur indique la température)
Evidence of Mediterranean Water dipole collision in the Gulf of Cadiz L'Hégaret et al, Journal of geophysical research

Chaque particule de fluide est "étiquetée" par sa position $\vec{r}_0$ à un instant de référence t_0.

$$\vec{r} = \vec{r}(\vec{r}_0, t)$$

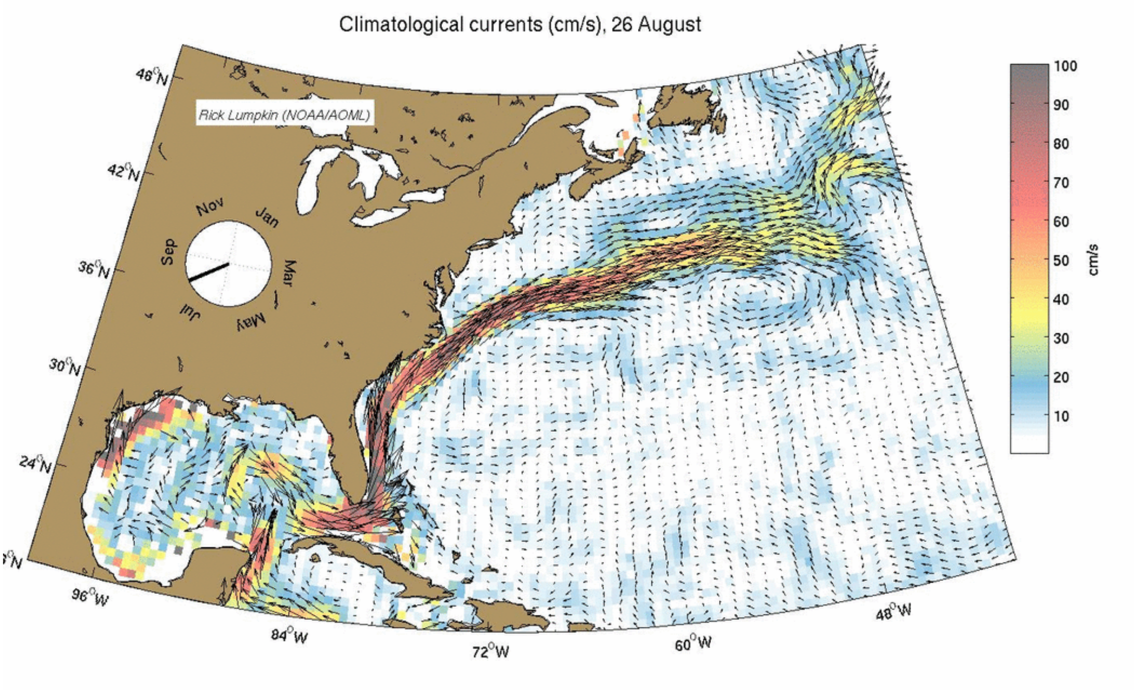
On suit ainsi la trajectoire de chaque particule fluide.



Visualisation des trajectoires des particules fluides lors du passage d'une onde de surface progressive sinusoïdale dans un canal. Des particules en suspension dans le fluide sont photographiées avec un temps de pose correspondant à une période(*An album of fluid motion*, Van Dyke.)

b) Description eulérienne

Plutôt que de suivre des bouées dérivantes, on peut aussi immerger des capteurs en des points fixes de l'océan, afin de mesurer localement la vitesse, la température, la salinité etc...
En immergeant un grand nombre de capteurs on peut voir se dessiner un champ (vectoriel) de vitesse, un champ (scalaire) de température etc...



https://www.aoml.noaa.gov/phod/graphics/dacdata/seasonal_gulfstream.gif

La description eulérienne s'appuie donc sur la notion de champ :

$$\vec{v}(M,t) = \vec{v}(\vec{r},t) \text{ avec } \vec{r} = \overrightarrow{OM}$$

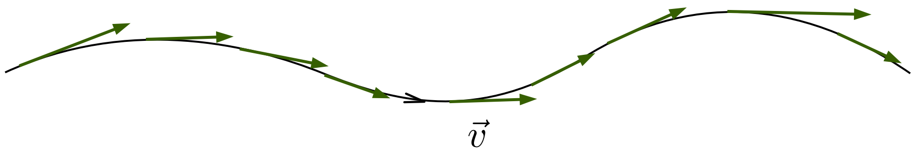
correspond à la vitesse du fluide au niveau du point M à l'instant t. Elle correspond à la vitesse de la particule fluide qui se trouve en M à l'instant t. Un instant plus tard, on mesure en ce même point la vitesse d'une autre particule fluide.

On peut définir de même le champ de pression $P(\vec{r},t)$, le champ de température $T(\vec{r},t)$, le champ de masse volumique $\rho(\vec{r},t)$.

Dans toute la suite du cours on adoptera le point de vue eulérien.

I.2. Ligne de courant

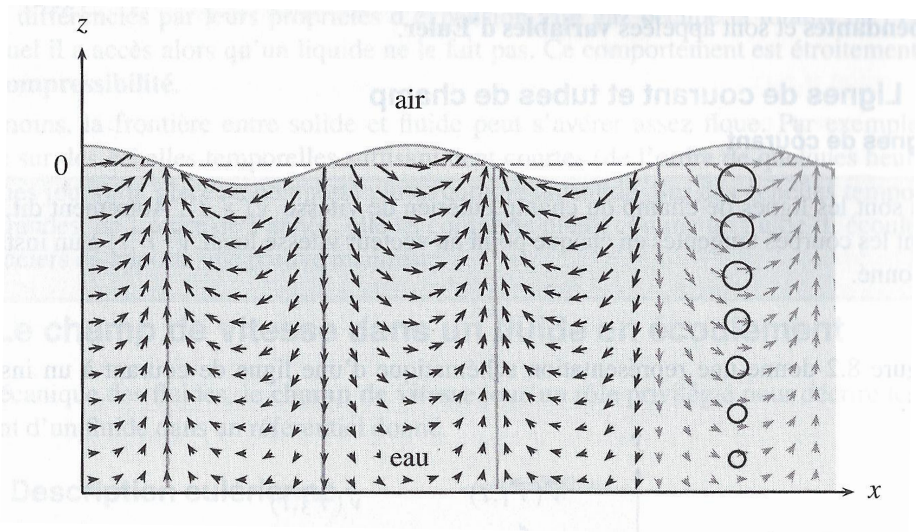
Par définition, une **ligne de courant** est une ligne en tout point tangente au vecteur vitesse $\vec{v}$.



On oriente la ligne de courant dans le sens du vecteur $\vec{v}$. Deux lignes de courant ne peuvent pas se croiser sauf en des points où $\vec{v} = \vec{0}$. Une ligne de courant ne donne pas d'indication sur la norme de $\vec{v}$ qui peut varier le long de la ligne.

Mathématiquement l'équation de la ligne de courant se traduit par :

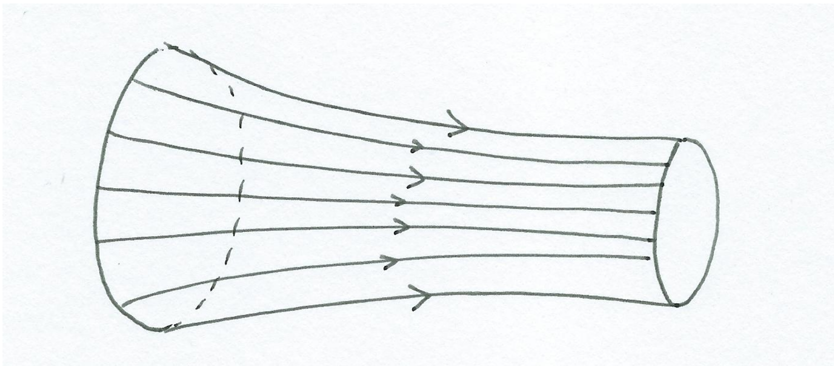
$$\vec{v}(M,t) \parallel \mathrm{d}\overrightarrow{OM} \quad \text{soit} \quad \vec{v}(M,t) \wedge \mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \vec{0}$$



Visualisation du champ de vitesse dans le cas de la houle en eau profonde.
On peut deviner l'allure des lignes de courant. Sur la partie droite ont été représentées quelques trajectoires de particules fluides pour différentes profondeurs : ces trajectoires sont des cercles dont le rayon diminue avec la profondeur. On constate que ces trajectoires ne sont pas confondues avec les lignes de courant.

I.3. Tube de courant

Un **tube de courant** correspond à l'ensemble des lignes de courant s'appuyant sur un contour fermé.



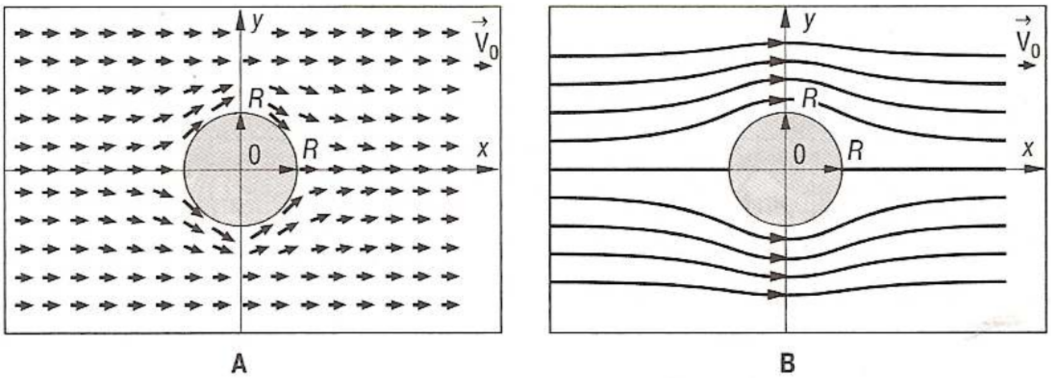
Par définition, le vecteur vitesse est tangent à la surface latérale du tube de courant, donc aucune particule fluide ne la traverse. L'écoulement se fait donc entre la surface d'entrée et la surface de sortie du tube.

I.4. Écoulement stationnaire

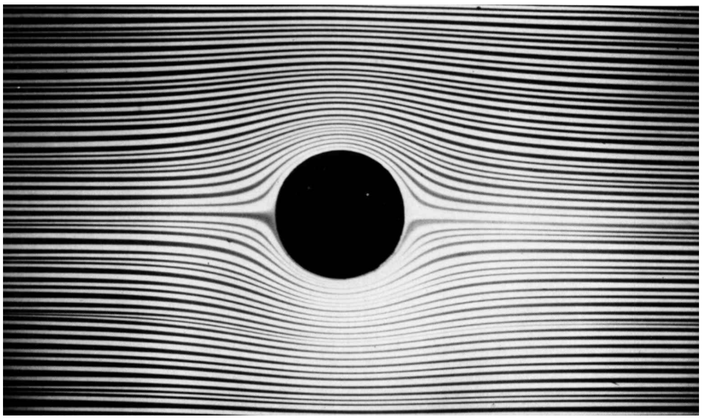
Un écoulement est **stationnaire** si tous les champs eulériens (champ de vitesse $\vec{v}(\vec{r},t)$, champ de pression $P(\vec{r},t)$, champ de masse volumique $\rho(\vec{r},t)$, sont **indépendants du temps**. Mathématiquement

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0} \qquad \frac{\partial P}{\partial t} = 0 \qquad \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Remarque :
Le caractère stationnaire ou non de l'écoulement dépend du référentiel dans lequel on se place. Par exemple le sillage d'un navire apparaît stationnaire pour un observateur situé sur le bateau mais pas pour un observateur situé sur la côte.



Écoulement stationnaire autour d'un cylindre fixe placé dans un écoulement de vitesse $\vec{V_0}$ uniforme à l'infini. Champ des vitesses à gauche et lignes de courant à droite.



Visualisation directe de l'écoulement à l'aide d'un colorant injecté en amont de l'obstacle (*An album of fluid motion*, Van Dyke. Photographie D.H. Peregrine.)

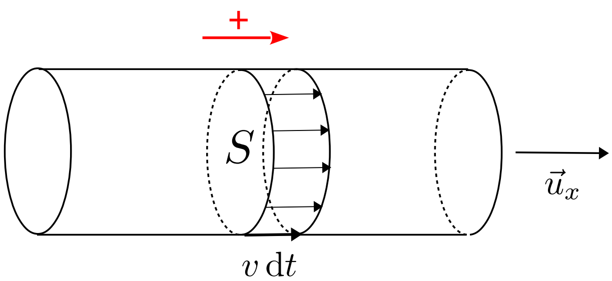
Lorsque l'écoulement est stationnaire, les lignes de courant coïncident avec les trajectoires des particules fluides.

II. Débit volumique - débit massique

II.1. Calcul à une dimension 1D

a) Débit volumique

On considère une conduite cylindrique de section S. On choisit un sens positif. Le débit volumique D_v représente le volume de fluide qui traverse la section S par unité de temps et compté positivement si le fluide s'écoule dans le sens positif et négativement si le fluide s'écoule dans le sens négatif.
On suppose que la vitesse du fluide est la même pour toute la section de conduite : $\vec{v} = v\vec{u}_x$.



Le fluide ayant traversé S pendant le temps dt occupe le volume cylindrique dV de base S et de hauteur vdt.

$$\mathrm{d}V = Sv\mathrm{d}t$$

On en déduit l'expression du débit volumique :

$$\boxed{D_v = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = Sv}$$

Vérifiez l'homogénéité de la formule.

Application :
À quelle vitesse est éjectée l'eau du jet d'eau du lac de Genève, de diamètre $d = 10,7$ cm, alimenté par une pompe débitant 500 $\mathrm{L.s^{-1}}$?

$D_v = Sv = \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 v$

$v = \frac{4}{\pi}\frac{D_v}{d^2}$

$v = \frac{4 \times 500.10^{-3}}{\pi \times 0,107^2} = 55,6\ \mathrm{m.s^{-1}} = 200\ \mathrm{km.h^{-1}}$

b) Débit massique

On reprend les hypothèses précédentes. On suppose également que la masse volumique ρ est la même dans toute la section. Le débit volumique D_m correspond à la masse de fluide qui traverse la section S par unité de temps et comptée positivement si le fluide s'écoule dans le sens positif et négativement si le fluide s'écoule dans le sens négatif.
On a montré précédemment que le fluide ayant traversé la section S pendant le temps $\mathrm{d}t$ se trouve dans le volume $\mathrm{d}V = Sv\mathrm{d}t$. La masse $\mathrm{d}m$ ayant traversé S pendant le temps $\mathrm{d}t$ vaut donc :

$$\mathrm{d}m = \rho \mathrm{d}V = \rho S v \mathrm{d}t$$

On en déduit l'expression du débit massique :

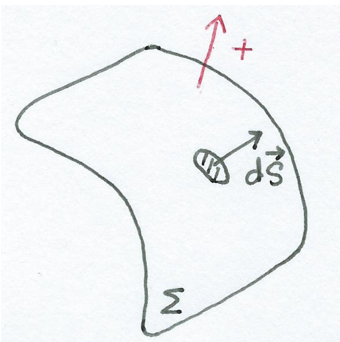
$$\boxed{D_m = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \rho S v}$$

Vérifiez l'homogénéité de la formule.

II.2. Calcul dans le cas général

a) Débit volumique

On souhaite calculer le débit volumique du fluide à travers la surface orientée Σ.

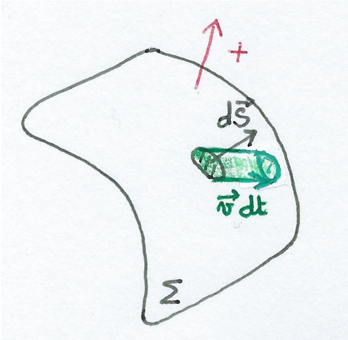


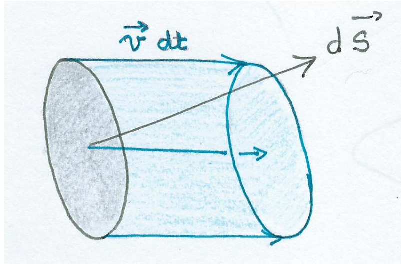
Pour cela on découpe la surface en une infinité de surfaces élémentaires caractérisées par

$$\mathrm{d}\vec{S} = \mathrm{d}S\vec{n}$$

avec $\mathrm{d}S$ la mesure de la surface élémentaire et $\vec{n}$ un vecteur unitaire orienté dans le sens positif choisi.

Commençons par compter le volume de fluide ayant traversé l'élément de surface $\mathrm{d}\vec{S}$ pendant $\mathrm{d}t$.





Le volume $\mathrm{d}V$ de fluide ayant traversé l'élément de surface $\mathrm{d}\vec{S}$ pendant le temps $\mathrm{d}t$ est contenu dans un cylindre de base $\mathrm{d}S$ et de génératrice $\vec{v}\mathrm{d}t$

$$\mathrm{d}V = \mathrm{d}\vec{S}.\vec{v}\mathrm{d}t = \mathrm{d}Sv\mathrm{d}t\cos\alpha$$

Ce qui correspond à un débit volumique élémentaire

$$\mathrm{d}D_v = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \mathrm{d}\vec{S}.\vec{v}$$

Le débit total à travers la surface Σ vaut

$$\boxed{D_v = \iint\limits_{\Sigma} \vec{v}.\mathrm{d}\vec{S}}$$

b) Débit massique

On effectue le même découpage que précédemment. La masse de fluide ayant traversé $\mathrm{d}\vec{S}$ pendant le temps $\mathrm{d}t$ est contenue dans le volume $\mathrm{d}V = \mathrm{d}\vec{S}.\vec{v}\mathrm{d}t$.

$$\mathrm{d}m = \rho\,\mathrm{d}\vec{S}.\vec{v}\mathrm{d}t$$

Ce qui correspond à un débit massique élémentaire

$$\mathrm{d}D_m = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \rho\mathrm{d}\vec{S}.\vec{v}$$

Le débit massique total à travers la surface Σ vaut

$$D_m = \iint\limits_{\Sigma} \rho\vec{v}.\mathrm{d}\vec{S}$$

On pose

$$\vec{\jmath} = \rho\vec{v}$$

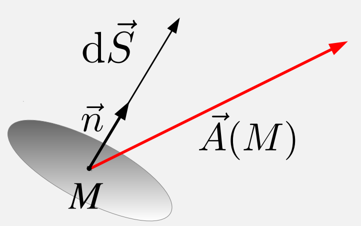
le vecteur **densité de flux de masse** (ou vecteur **densité de courant**).

Le débit massique D_m du fluide à travers une surface Σ orientée a pour expression :

$$D_m = \iint\limits_{\Sigma} \vec{\jmath}.\mathrm{d}\vec{S}$$

II.3. Flux d'un champ vectoriel. Opérateur divergence

a) Flux élémentaire



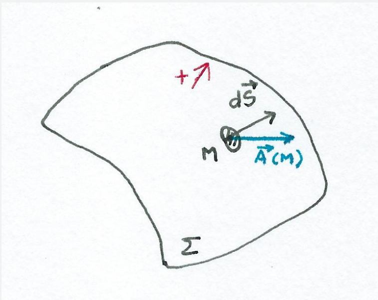
Soit un champ vectoriel $\vec{A}(M)$. Soit un élément de surface $\mathrm{d}S$ et $\vec{n}$ un vecteur unitaire normal à cette surface. Le choix du sens de $\vec{n}$ définit l'orientation de cette surface.

On définit le **flux élémentaire** du champ vectoriel $\vec{A}$ **à travers la surface orientée** $\mathrm{d}\vec{S} = \mathrm{d}S\vec{n}$ par :

$$\mathrm{d}\phi = \vec{A}(M).\mathrm{d}\vec{S}$$

le signe de $\mathrm{d}\phi$ dépend du sens d'orientation choisi.

b) Flux à travers une surface



On considère une surface Σ orientée. On définit ϕ le **flux du champ vectoriel** $\vec{A}$ **à travers la surface** Σ par

$$\phi = \iint_{\Sigma} \vec{A}(M).\mathrm{d}\vec{S}$$

le signe de ϕ dépend du sens d'orientation choisi.

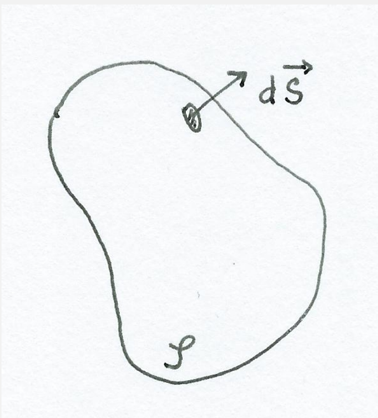
Le débit volumique D_v correspond donc au flux du champ vectoriel vitesse $\vec{v}$:

$$D_v = \iint_{\Sigma} \vec{v}.\mathrm{d}\vec{S}$$

et le débit massique correspond au flux du vecteur densité de courant (ou vecteur densité de flux de masse) $\vec{\jmath} = \rho\vec{v}$:

$$D_m = \iint_{\Sigma} \vec{\jmath}.\mathrm{d}\vec{S}$$

c) Théorème d'Ostrogradski



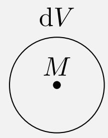
Soit $\vec{A}(M)$ un champ vectoriel : il existe un unique champ scalaire $\mathrm{div}\,\vec{A}$ tel que, pour toute surface fermée $\mathscr{S}$ limitant le volume $\mathscr{V}$ et orientée vers l'extérieur :

$$\oiint_{\mathscr{S}} \vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \iiint_{\mathscr{V}} \mathrm{div}\,\vec{A}\,\mathrm{d}V \qquad \textbf{Théorème d'Ostrogradski}$$

$\mathrm{div}\,\vec{A}$ est appelé divergence du champ $\vec{A}$.

Si on fait tendre la taille du volume $\mathscr{V}$ vers 0, on obtient une définition locale de la divergence :

On a, pour un volume élémentaire $\mathrm{d}V$ entourant un point M :



$$\mathrm{d}\phi_M = \operatorname{div} \vec{A}(M)\,\mathrm{d}V$$

avec $\mathrm{d}\phi$ le flux élémentaire **sortant** du champ $\vec{A}$ à travers la surface fermée entourant le point M.

Un champ de vecteur "diverge" en un point si son flux à travers une surface fermée élémentaire entourant ce point est non nul.

d) Expression de la divergence

On peut déduire la relation précédente une expression en coordonnées cartésiennes de $\operatorname{div} \vec{A}$:

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

On introduit un opérateur symbolique appelé opérateur ***nabla*** (que l'on n'utilisera qu'en ***coordonnées cartésiennes***) :

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\,\vec{u}_x + \frac{\partial}{\partial y}\,\vec{u}_y + \frac{\partial}{\partial z}\,\vec{u}_z$$

$$\operatorname{div} \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}$$

Vérification : $\vec{\nabla}\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \quad \vec{A}\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$

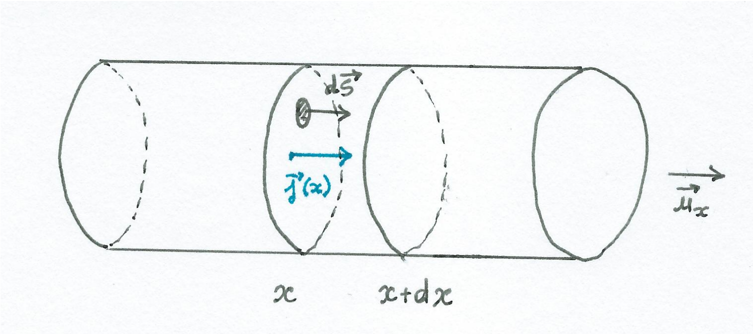
III. Bilan de matière en régime stationnaire

III.1. Bilan 1D

On considère une conduite cylindrique de section S. On se place en régime stationnaire et on suppose que

$$\vec{j} = j(x)\vec{u}_x$$

En régime stationnaire la masse de fluide contenue entre les sections x et $x+\ dx$ est indépendante du temps : le débit massique entrant doit donc être égal au débit massique sortant.



Le débit massique entrant correspond au flux du vecteur densité de courant (ou densité de flux de masse) $\vec{j}$ à travers la section d'entrée située en x :

$$\phi_e = \iint_S \vec{j}(x).\mathrm{d}\vec{S} = \iint_S j(x)\vec{u}_x.\mathrm{d}S\vec{u}_x = \iint_S j(x)\mathrm{d}S = j(x)\iint_S dS = j(x)S$$

On calcule de même le débit massique sortant à travers la section située en $x + \mathrm{d}x$:

$$\phi_s = j(x+\mathrm{d}x)S$$

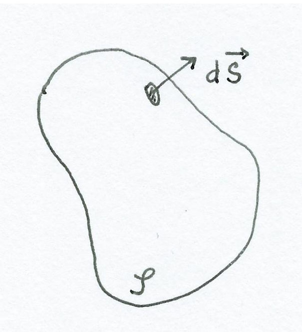
En régime stationnaire, la conservation de la masse comprise entre les sections x et $x + \mathrm{d}x$ impose

$$j(x)S = j(x+\mathrm{d}x)S$$

$$j(x) = j(x+\mathrm{d}x) = cte$$

$$\frac{\mathrm{d}j}{\mathrm{d}x} = 0$$

III.2. Cas général



On effectue un bilan de masse contenue dans un volume $\mathcal{V}$ délimité par la surface fermée $\mathscr{S}$. **En écoulement stationnaire**, la masse totale contenue à l'intérieur du volume est constante : il doit entrer autant de masse qu'il en sort. Le débit massique à travers Σ doit être globalement nul.

$$\oiint_{\mathscr{S}} \vec{j}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = 0$$

Or, d'après le théorème d'Ostrogradski

$$\oiint_{\mathscr{S}} \vec{j}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \iiint_{\mathcal{V}} \mathrm{div}\,\vec{j}\ \mathrm{d}V$$

On en déduit :

$$\iiint_{\mathcal{V}} \mathrm{div}\,\vec{j}\,\mathrm{d}V = 0$$

Cette relation devant être vérifiée quel que soit le volume $\mathcal{V}$ de fluide considéré, on a

$$\boxed{\mathrm{div}\,\vec{j} = 0}$$

Le champ vectoriel $\vec{j}$ est de divergence nulle.

Si de plus le champ de masse volumique est uniforme $\rho = cte$ dans tout le fluide :

$$\operatorname{div}\vec{j} = \operatorname{div}\rho\vec{v} = \rho\operatorname{div}\vec{v} = 0$$

On en déduit

$$\boxed{\operatorname{div}\vec{v} = 0}$$

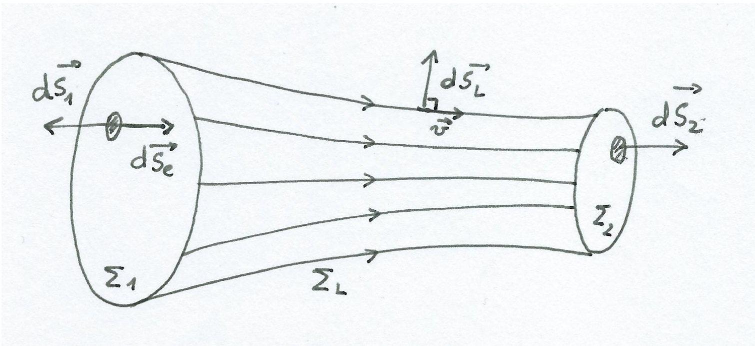
Le champ de masse volumique est uniforme $\rho = cte$ dans tout le fluide, lorsque le fluide est incompressible (écoulement d'un liquide). On peut aussi considérer $\rho = cte$ dans le cas d'un gaz, tel que l'air, à condition que la vitesse de l'écoulement soit très inférieure à la vitesse de propagation des ondes sonores.

III.3. Conservation du flux

On considère un écoulement stationnaire. Le vecteur densité de flux de masse vérifie donc la relation :

$$\operatorname{div}\vec{j} = 0$$

On considère un tube de courant. On note Σ_1 la surface d'entrée, Σ_2 la surface de sortie et Σ_L la surface latérale. La surface totale $\Sigma_1 \cup \Sigma_L \cup \Sigma_2$ est une surface fermée que l'on oriente vers l'extérieur.



On peut définir

– le flux entrant ϕ_e de $\vec{j}$, qui correspond au débit massique entrant par la section Σ_1 :

$$\phi_e = \iint_{\Sigma_1} \vec{j}.\mathrm{d}\vec{S}_e \text{ avec } \mathrm{d}\vec{S}_e = -\mathrm{d}\vec{S}_1$$

– le flux sortant ϕ_s, qui correspond au débit massique sortant par la section Σ_2 :

$$\phi_s = \iint_{\Sigma_2} \vec{j}.\mathrm{d}\vec{S}_2$$

– le flux à travers la surface latérale, qui est nul :

$$\phi_L = \iint_{\Sigma_L} \vec{j}.\mathrm{d}\vec{S}_L = \iint_{\Sigma_L} \rho\,\underbrace{\vec{v}.\mathrm{d}\vec{S}_L}_{=0} = 0 \quad \text{car } \vec{v} \perp \mathrm{d}\vec{S}_L$$

On calcule le flux de $\vec{j}$ à travers la surface totale fermée **orientée vers l'extérieur** en utilisant le théorème d'Ostrogradski :

$$\oiint_{\Sigma_1\cup\Sigma_L\cup\Sigma_2} \vec{j}.\mathrm{d}\vec{S} = \iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div}\vec{j} = 0$$

$$\iint_{\Sigma_1} \vec{j}.(-\mathrm{d}\vec{S}_e) + \underbrace{\iint_{\Sigma_L} \vec{j}.\mathrm{d}\vec{S}_L}_{=0} + \iint_{\Sigma_2} \vec{j}.\mathrm{d}\vec{S}_2 = 0$$

$$-\phi_e + \phi_s = 0$$

$$\boxed{\phi_e = \phi_s}$$

Le champ vectoriel $\vec{j}$ est dit à **flux conservatif**. On a donc

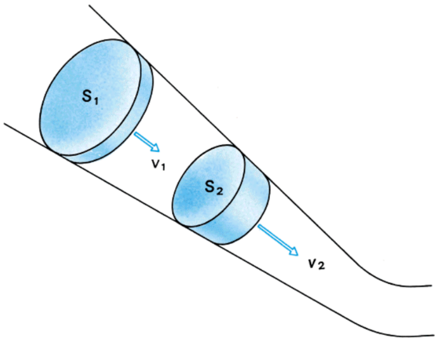
$$D_{m_e} = D_{m_s}$$

La conservation du flux de $\vec{j}$ équivaut à la conservation du débit massique.

Si de plus le champ de masse volumique est uniforme $\rho = cte$ alors $\operatorname{div} \vec{v} = 0$. Le champ de vitesse est à flux conservatif. L'égalité du flux entrant et du flux sortant d'un tube de courant entraîne alors la conservation du débit volumique :

$$D_{v_e} = D_{v_s}$$

Conséquence : quand les lignes de courant se resserrent il y a augmentation de la vitesse moyenne d'écoulement sur une section.



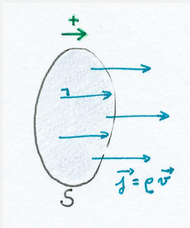
$$D_v = S_1 v_1 = S_2 v_2$$

III.4. Récapitulatif

- Le débit massique D_m à travers une surface Σ orientée correspond au flux du champ de vecteur densité de flux de masse $\vec{j} = \rho\vec{v}$ à travers cette surface.

$$D_m = \iint_\Sigma \vec{j}.\mathrm{d}\vec{S}$$

Dans le cas où la vitesse et la masse volumique sont uniformes sur toute la section et où la vitesse est perpendiculaire à la surface S :

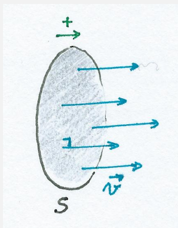


$$D_m = \rho S v$$

- Le débit volumique D_v à travers une surface Σ orientée correspond au flux du champ de vecteur vitesse $\vec{v}$.

$$D_v = \iint_\Sigma \vec{v}.\mathrm{d}\vec{S}$$

Dans le cas où la vitesse est uniforme sur toute la section et perpendiculaire à la surface S :



$$D_v = S v$$

- Dans le cas d'un fluide de champ de masse volumique uniforme ($\rho = cte$) on peut toujours écrire $D_m = \rho D_v$.

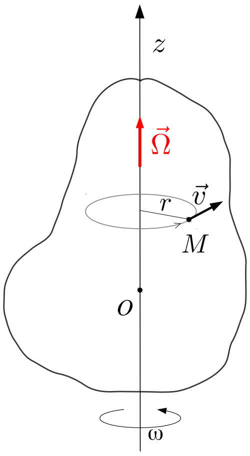
- Pour un **écoulement stationnaire** $\mathrm{div}\,\vec{j} = 0$.
  $\vec{j}$ est à flux conservatif : le flux de $\vec{j}$ à travers une surface fermée est nul. Il y a conservation du débit massique à travers toute section d'un tube de courant.

- Pour un **écoulement stationnaire** et de **champ de masse volumique uniforme** ($\rho = cte$) : $\mathrm{div}\,\vec{v} = 0$.
  Il y a conservation du débit volumique D_v (et du débit massique $D_m = \rho D_v$) à travers toute section d'un tube de courant.

IV. Écoulement tourbillonnaire

IV.1. Vorticité

a) Exemple du solide en rotation



On considère un solide en rotation autour de l'axe Oz à la vitesse angulaire ω. Tout point M lié au solide possède une vitesse

$$\vec{v} = r\omega\vec{u}_\theta$$

en coordonnées cylindriques.
On peut calculer, à l'aide du formulaire d'analyse vectorielle, le rotationnel de la vitesse :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rv_\theta)}{\partial r}\vec{u}_z = \frac{1}{r}\frac{\partial(r^2\omega)}{\partial r}\vec{u}_z = 2\omega\vec{u}_z = 2\vec{\Omega}$$

où $\vec{\Omega} = \omega\vec{u}_z$ représente le vecteur rotation du solide.

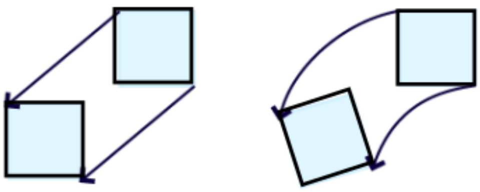
b) Vecteur tourbillon

Revenons à l'écoulement d'un fluide.

On définit le **vecteur tourbillon** (ou **vorticité**) du fluide en un point M donné par

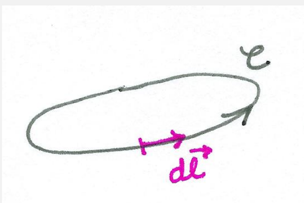
$$\vec{\Omega}(M) = \frac{1}{2}\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v}(M)$$

Ce vecteur représente la rotation locale d'une particule fluide :



À gauche : translation de la particule fluide ; à droite rotation de la particule fluide.

IV.2. Circulation d'un champ vectoriel



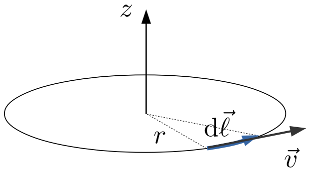
Soit $\vec{A}$ un champ vectoriel. Soit $\mathscr{C}$ un contour fermé et orienté. On définit la circulation de $\vec{A}$ sur le contour $\mathscr{C}$ par la relation

$$\mathcal{C} = \oint_{\mathscr{C}} \vec{A}\cdot d\vec{\ell}$$

où $d\vec{\ell}$ représente un déplacement élémentaire le long de $\mathscr{C}$ dans le sens d'orientation choisi.

Question : que vaut la circulation de $\vec{F} = m\vec{g}$ sur un contour $\mathscr{C}$ fermé ?

Reprenons l'exemple du solide en rotation : $\vec{v} = v(r)\vec{u}_\theta = r\omega\vec{u}_\theta$. On peut calculer la circulation de $\vec{v}$ sur un cercle $\mathscr{C}$ d'axe Oz et de rayon r. En tout point de $\mathscr{C}$ le déplacement élémentaire vaut $\mathrm{d}\vec{\ell} = \mathrm{d}\ell\vec{u}_\theta = r\mathrm{d}\theta\vec{u}_\theta$.



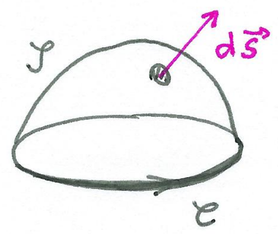
$$\oint_{\mathscr{C}} \vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell} = \oint_{\mathscr{C}} v(r)\mathrm{d}\ell = v(r)\oint_{\mathscr{C}} \mathrm{d}\ell = v(r)2\pi r = r\omega 2\pi r = 2\pi r^2\omega$$

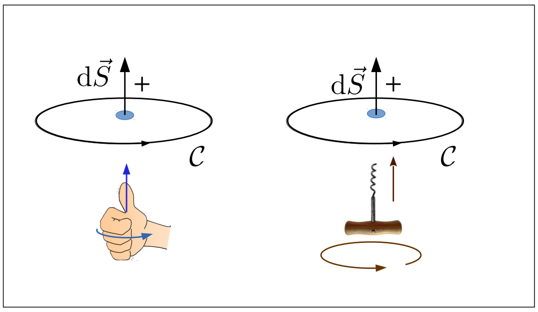
IV.3. Théorème de Stokes

Soit $\vec{A}(M)$ un champ vectoriel : il existe un unique champ vectoriel $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}$ tel que, pour toute surface $\mathscr{S}$ s'appuyant sur le contour fermé $\mathscr{C}$, $\mathscr{S}$ étant orientée par le sens de parcours choisi sur $\mathscr{C}$ via la règle de la main droite (ou la règle du tire bouchon) :

$$\oint_{\mathscr{C}} \vec{A}\cdot d\vec{\ell} = \iint_{\mathscr{S}} \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{S} \qquad \textbf{Théorème de Stokes}$$

L'orientation de la surface $\mathscr{S}$ se déduit de l'orientation du circuit $\mathscr{C}$ par la règle du tire-bouchon (ou par la règle de la main droite).

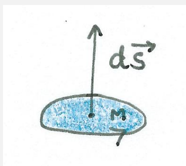




Si on fait tendre la taille du circuit $\mathscr{C}$ vers 0, on obtient une définition locale du rotationnel :

On a, pour un circuit fermé entourant un point M et délimitant une surface orientée élémentaire $\mathrm{d}\vec{S}$:

$$\mathrm{d}\mathcal{C} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}(M).\mathrm{d}\vec{S}$$



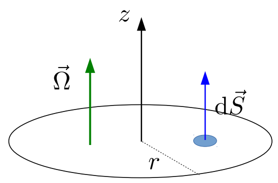
avec $\mathrm{d}\mathcal{C}$ la circulation élémentaire de $\vec{A}$ le long du contour.

Un champ de vecteur dont le rotationnel en un point est non nul a une circulation non nulle autour de ce point et "tourne" autour de ce point.

• Vérifions que le théorème de Stokes s'applique à l'exemple du solide en rotation.
On a déjà calculé la circulation du vecteur vitesse le long d'un cercle d'axe Oz et de rayon r :

$$\oint_{\mathscr{C}} \vec{v}\cdot d\vec{\ell} = v(r)2\pi r = 2\pi r^2\omega$$

On a $\vec{\Omega} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v} = \omega\vec{u}_z$. On peut retrouver la circulation de $\vec{v}$ à l'aide du théorème de Stokes :



$$\oint_{\mathscr{C}} \vec{v}\cdot d\vec{\ell} = \iint_{\mathscr{S}} \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iint_{\mathscr{S}} 2\,\vec{\Omega}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = 2\iint_{\mathscr{S}} \omega\vec{u}_z\cdot \mathrm{d}S\vec{u}_z = 2\omega\iint_{\mathscr{S}} \mathrm{d}S = 2\omega\pi r^2$$

IV.4. Expression du rotationnel

On peut déduire de la formulation locale du théorème de Stokes l'expression en coordonnées cartésiennes de $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}$.

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\,\vec{u}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\,\vec{u}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\,\vec{u}_z$$

On peut formellement écrire, en utilisant l'opérateur symbolique ***nabla*** (que l'on n'utilisera qu'en ***coordonnées cartésiennes***) :

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\,\vec{u}_x + \frac{\partial}{\partial y}\,\vec{u}_y + \frac{\partial}{\partial z}\,\vec{u}_z$$

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A} = \vec{\nabla}\wedge\vec{A}$$

Vérification : $\vec{\nabla}\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix} \quad \vec{A}\begin{pmatrix}A_x\\ A_y\\ A_z\end{pmatrix} \quad \vec{\nabla}\wedge\vec{A} = \begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}A_x\\ A_y\\ A_z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\dfrac{\partial A_z}{\partial y} - \dfrac{\partial A_y}{\partial z}\\ \dfrac{\partial A_x}{\partial z} - \dfrac{\partial A_z}{\partial x}\\ \dfrac{\partial A_y}{\partial x} - \dfrac{\partial A_x}{\partial y}\end{pmatrix}$

IV.5. Écoulement irrotationnel

Un écoulement est dit **irrotationnel** si le vecteur **tourbillon $\vec{\Omega}$ est nul en tout point**. Le rotationnel du champ de vitesse est donc nul en tout point :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v}(M,t) = \vec{0}$$

Dans le cas contraire l'écoulement est dit tourbillonnaire.

Si un écoulement est irrotationnel alors la circulation de la vitesse sur un contour fermé est nulle. On dit que la vitesse est à circulation conservative.

$$\oint_{\mathscr{C}} \vec{v}\cdot d\vec{\ell} = \iint_{\mathscr{S}} \underbrace{\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v}}_{=\vec{0}}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = 0$$

Dans le cas où l'écoulement est irrotationnel ($\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v} = \vec{0}$) le champ de vitesse dérive d'un potentiel. On peut poser :

$$\vec{v}(M,t) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\varphi(M,t)$$

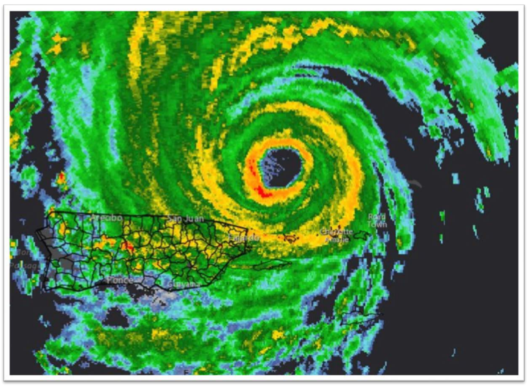
où φ est appelé le potentiel des vitesses.

IV.6. Champ de vitesse dans une tornade

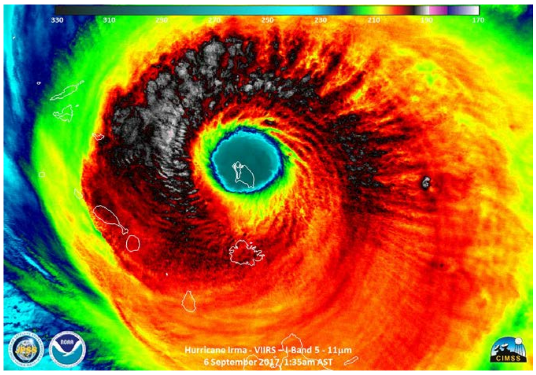
Une tornade est assimilée à un écoulement stationnaire et de champ de masse volumique uniforme $\rho = cte$. Le champ de vitesse est supposé de la forme $\vec{v} = v(r)\vec{u}_\theta$. Il est caractérisé par un vecteur tourbillon $\vec{\Omega} = \Omega\vec{u}_z$ tel que :

$$\Omega = \begin{cases} \omega & \text{si } r \leqslant a \\ 0 & \text{si } r > a \end{cases}$$

1. Vérifier que $\operatorname{div}\vec{v} = 0$.
2. À l'aide du théorème de Stokes, établir l'expression du champ de vitesse en fonction de ω, a et r.
3. Tracer l'allure de la courbe de $v(r)$.



San Juan Doppler radar reflectivity image at 2115 UTC 6 September showing Hurricane Irma's concentric eyewalls



Satellite image of hurricane Irma when it was at its peak intensity and made landfall on Barbuda at 0535 UTC 6 spetember.

(extrait du NATIONAL HURRICANE CENTER TROPICAL CYCLONE REPORT)

IV.7. Récapitulatif

- On définit le **vecteur tourbillon** par

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v}$$

ce vecteur représente la rotation locale des particules fluides.

- Un écoulement est irrotationnel si le vecteur tourbillon est nul en tout point. Dans ce cas la circulation de la vitesse sur un contour fermé quelconque est toujours nulle et on peut poser $\vec{v} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\varphi$.

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v} = \vec{0} \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{v} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\varphi \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{v} \text{ est à circulation conservative}$$

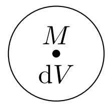
V. Observation de quelques écoulements

On souhaite déterminer le caractère divergent ou non, rotationnel ou non d'écoulements stationnaires pour différents champs de vitesse. Connaissant le champ de vitesse, il suffit de calculer la divergence ou le rotationnel et voir s'ils sont nuls ou non. Cependant, l'observation directe de l'écoulement permet parfois de le déterminer.

V.1. Interprétation de $\operatorname{div} \vec{v}$

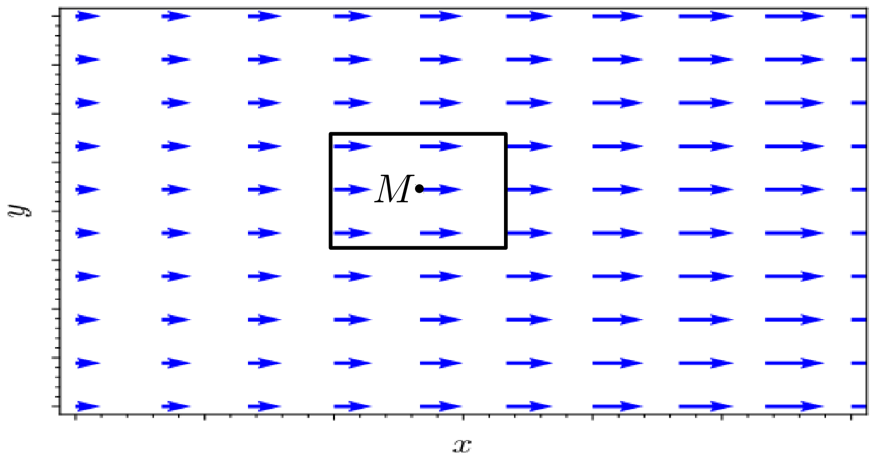
On a vu au II.3. que la divergence était relié au flux. Pour un volume élémentaire $\mathrm{d}V$ entourant un point M :

$$\mathrm{d}\phi = \operatorname{div} \vec{A}(M)\,\mathrm{d}V$$



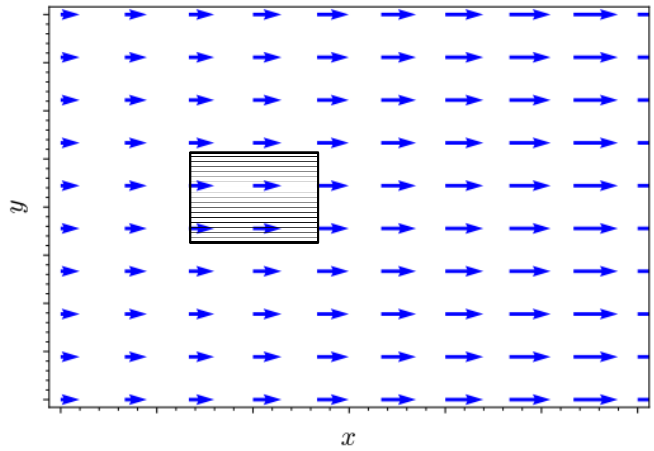
avec $\mathrm{d}\phi$ le flux sortant du champ $\vec{A}$ à travers la surface fermée entourant le point M.

Considérons un écoulement où le champ de vitesse est de la forme $\vec{v} = v_x(x)\vec{u}_x$ avec $v_x(x)$ une fonction croissante de x. On constate que le flux sortant de la vitesse à travers une surface fermée entourant un point M quelconque est positif : on en déduit $\operatorname{div} \vec{v} > 0$.

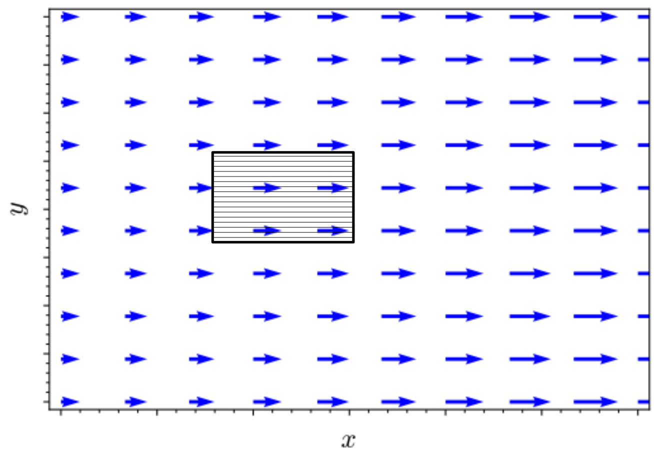


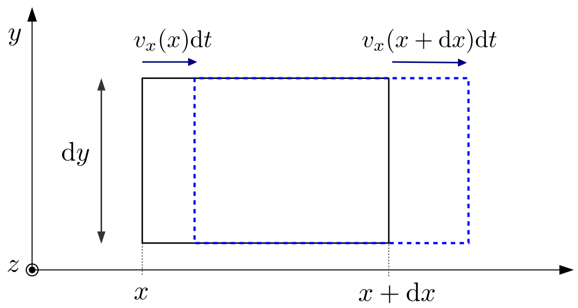
Considérons l'évolution d'une particule fluide dans l'écoulement, entre un instant t et un instant $t + \mathrm{d}t$

instant t



instant t+dt





On considère l'évolution d'une particule fluide comprise à l'instant t entre x et $x + \mathrm{d}x$.

Entre l'instant t et l'instant $t + \mathrm{d}t$ la surface située en $x +\ dx$ se déplace plus que la surface située en x. On observe une dilatation du volume.

À l'instant t, le volume dV occupé par la particule fluide vaut $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$. À l'instant $t + \mathrm{d}t$, le volume occupé par la particule fluide en $t + \mathrm{d}t$ vaut

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}V(t+\mathrm{d}t) &= [\mathrm{d}x + v_x(x+\mathrm{d}x)\mathrm{d}t - v_x(x)\mathrm{d}t]\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
&= [\mathrm{d}x + (v_x(x+\mathrm{d}x) - v(x))\mathrm{d}t]\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
&= \left[\mathrm{d}x + \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
&= \left[1 + \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z
\end{aligned}$$

On peut calculer la variation relative du volume pendant dt :

$$\frac{dV(t+\mathrm{d}t) - \mathrm{d}V(t)}{\mathrm{d}V(t)} = \frac{\left[1 + \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z - \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z} = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}t$$

Le taux d'accroissement du volume vaut donc :

$$\frac{1}{\mathrm{d}t}\frac{dV(t+\mathrm{d}t) - \mathrm{d}V(t)}{\mathrm{d}V(t)} = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}x}$$

On peut généraliser ce résultat à trois dimensions :

$$\frac{1}{\mathrm{d}t}\frac{dV(t+\mathrm{d}t)-\mathrm{d}V(t)}{\mathrm{d}V(t)}=\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}=\mathrm{div}\,\vec{v}$$

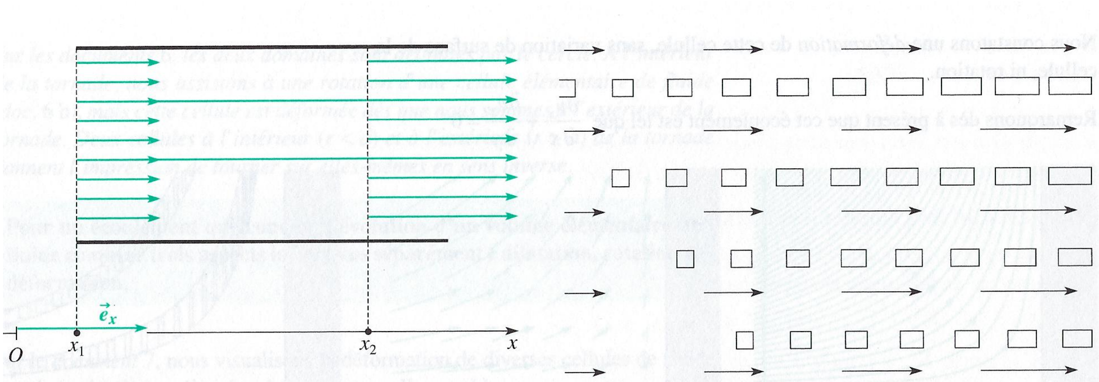
La divergence $\mathrm{div}\,\vec{v}$ représente le taux de variation relative du volume d'une particule fluide, soit le taux de dilatation de cette particule fluide.

Dans le cas d'un **écoulement incompressible**, le volume de la particule fluide ne varie pas. La particule fluide peut tourner, se déformer mais en conservant un volume constant (et donc une masse volumique constante). On a alors $\mathbf{div}\,\vec{\boldsymbol{v}}=\mathbf{0}$.

Remarque : un écoulement peut être incompressible soit parce ce que le fluide est incompressible (c'est le cas des liquides), soit, dans le cas d'un gaz, parce que la vitesse de l'écoulement est faible devant la vitesse de propagation des ondes sonores.

V.2. Visualisation de quelques écoulements

a) Exemple 1



Simulation d'un écoulement dans une tuyère avec visualisation de la dilatation de particules fluides.

L'écoulement est divergent (le volume des particules fluides augmente donc leur masse volumique diminue) et irrotationnel (les particules fluides ne présentent pas de mouvement de rotation).

Vérifications : $\vec{v}_x(x)\vec{u}_x$ avec $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}>0$.

- $\mathrm{div}\,\vec{v}=\dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}x}>0$ la divergence est bien positive
- $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v}=\vec{0}$

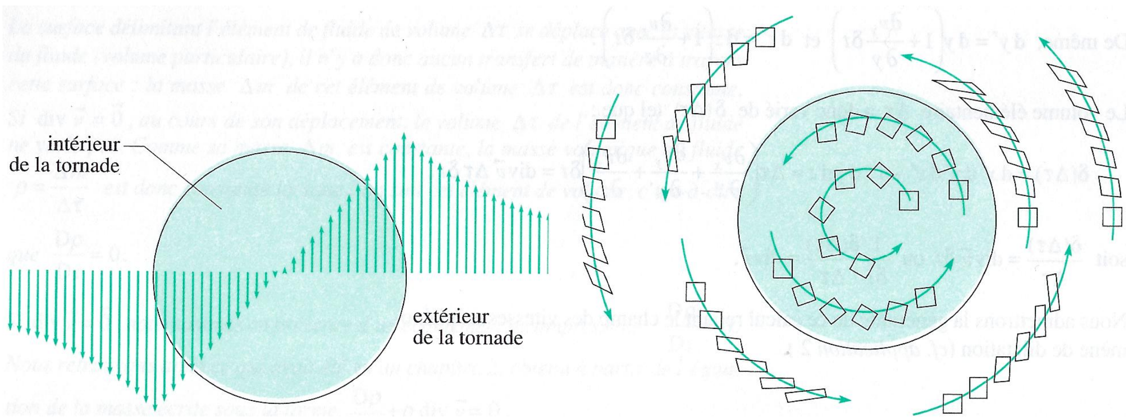
b) Exemple 2

Visualisation du champ de vitesse dans l'œil d'une tornade et mise en évidence de la rotation des particules fluides

L'écoulement est non divergent (le volume des particules fluide reste constant) et rotationnel (les particules fluides présentent mouvement de rotation).

En effet pour un champ de vitesse $\vec{v} = r\omega\vec{u}_\theta$ (écoulement orthoradial) on a

- $\operatorname{div}\vec{v} = \frac{1}{r}\frac{\partial(r\omega)}{\partial\theta} = 0$ la divergence est bien nulle.
- $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v} = 2\omega\vec{u}_z$ l'écoulement est tourbillonnaire.



Visualisation du champ de vitesse complet d'une tornade et mise en évidence de la rotation des particules fluides dans l'œil et de leur translation avec déformation à l'extérieur de l'œil

L'écoulement est non divergent (le volume des particules fluide reste constant, même si elles se déforment) et rotationnel dans l' œil et irrotationnel à l'extérieur.

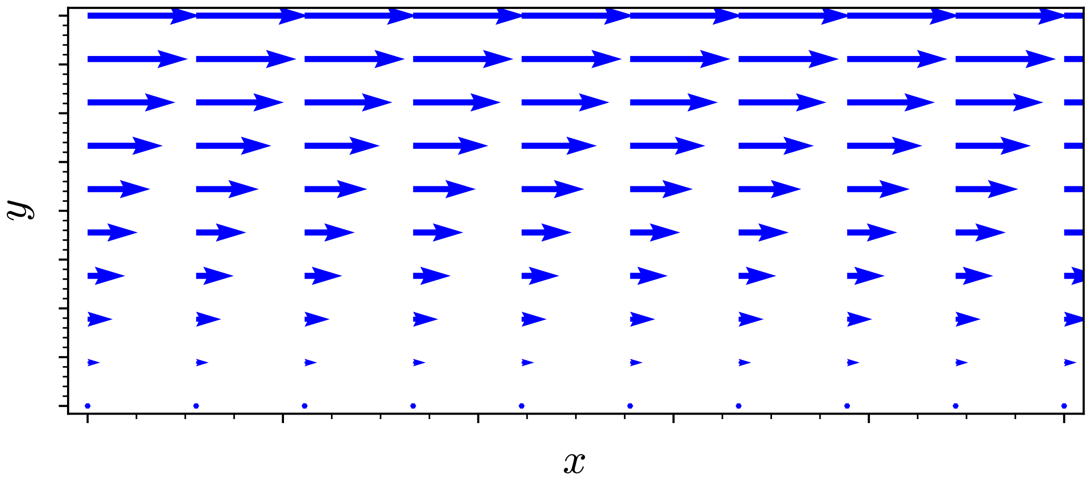
Il reste à faire le calcul pour l'extérieur de l'œil :

- $\operatorname{div}\vec{v} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\dfrac{a\omega}{r}\right) = 0$ la divergence est bien nulle.
- $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v} = \vec{0}$ l'écoulement est irrotationnel dans la zone située à l'extérieur de l'œil.

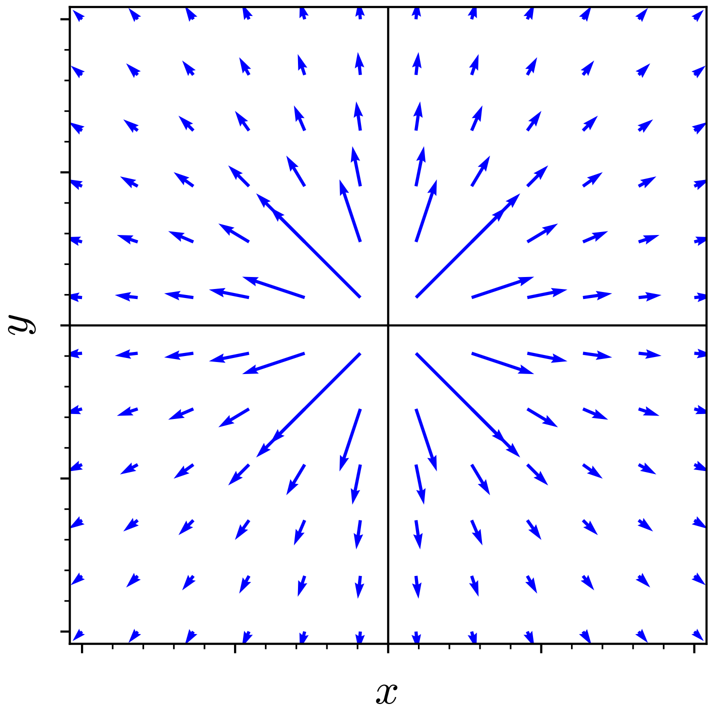
V.3. Autres exemples

Analyser le caractère divergent ou non, rotationnel ou non des écoulements suivants

a) Écoulement de Couette plan



b) Source



On suppose qu'on a placé sur l'axe Oz une source qui possède un certain débit volumique par unité de longueur (on peut la représenter par un tuyau d'arrosage qui serait percé d'une multitude de trous uniformément répartis à sa surface).

On suppose l'écoulement stationnaire et le fluide incompressible.

Le champ de vitesse est radial et de la forme : $\vec{v} = \dfrac{\lambda}{2\pi r}\vec{u}_r$

- Calculer le flux du champ de vitesse à travers une surface cylindrique d'axe Oz et de hauteur h. Commenter. À quoi correspond le coefficient λ ?
- Calculer $\operatorname{div} \vec{v}$ et $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\, v$. Commenter.

Description d'un fluide en écoulement en régime stationnaire	
Grandeurs eulériennes Champ de vitesse Ligne de courant, tube de courant Régime stationnaire	Décrire les propriétés thermodynamiques et mécaniques d'un fluide à l'aide des grandeurs locales pertinentes. Évaluer le caractère divergent ou rotationnel d'un écoulement uniforme, à symétrie sphérique, à symétrie axiale (radiale ou orthoradiale) en connaissant l'expression du champ des vitesses.
Débit volumique et débit massique	Exprimer les débits volumique et massique. Définir le vecteur densité de flux de masse.
Écoulement stationnaire dont le champ des masses volumiques est uniforme	Établir un bilan local et global de matière en régime stationnaire. Établir qu'en régime stationnaire le champ des vitesses est à flux conservatif. Connaître les propriétés d'un écoulement pour lequel le champ des vitesses est à flux conservatif.
Écoulement stationnaire et irrotationnel	Connaître les propriétés d'un écoulement pour lequel le champ des vitesses est à circulation conservative.