M4 - Oscillations libres

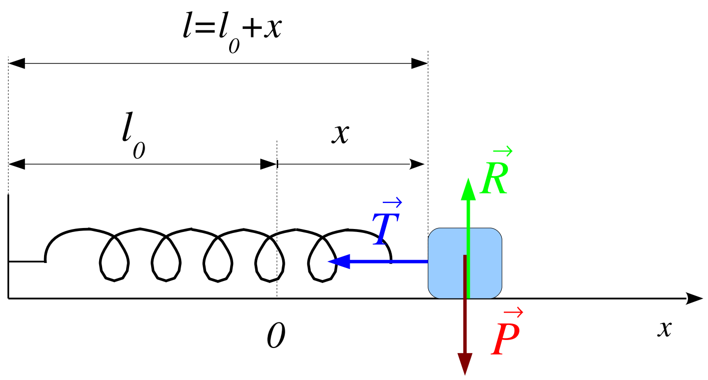
On considère dans ce chapitre, des systèmes oscillants (exemple : système masse-ressort, pendule...). On dit qu'ils oscillent librement si aucune force excitatrice ne s'exerce sur eux.
En l'absence de force dissipative, les oscillations perdurent. Dans la vraie vie, les forces dissipatives existent. Elles ont pour effet de diminuer progressivement l'amplitude des oscillations jusqu'à ce que le système retrouve sa position d'équilibre.

I. Mouvement dans un puits de potentiel harmonique

I.1. Ressort horizontal

a) Dispositif expérimental

On considère une masse oscillant sans frottements sur un plan horizontal.
On choisit l'origine des x telle que $x = 0$ lorsque le ressort a sa longueur au repos ℓ_0. $x = 0$ correspond alors à la position d'équilibre.



Système : masse m

Référentiel : référentiel du labo supposé galiléen

Bilan des forces : - poids $\vec{P} = m\vec{g}$ (force conservative)
- réaction normale du support $\vec{R}$ avec $\vec{R} \perp \vec{u}_x$ car pas de frottements sur le support ($\vec{R}$ ne travaille pas)
- force de rappel du ressort : $\vec{T}$ (force conservative)

Le poids est une force conservative, mais le mouvement étant horizontal, le poids ne travaille pas. L'énergie potentielle de pesanteur est constante et on peut la choisir égale à $E_{pp} = 0$.

La réaction du support $\vec{R}$ est également perpendiculaire au mouvement : elle ne travaille pas, sa puissance est nulle.

Au cours du mouvement seule la force élastique travaille. C'est une force conservative donc, d'après le TPM :

$$\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}_{nc} = 0$$

$$E_m = cte$$

$\Rightarrow$ le mouvement est conservatif.

L'énergie potentielle a pour expression (si on choisit $E_p = 0$ pour $\ell = \ell_0$) :

$$E_p = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2 = \frac{1}{2}kx^2$$

b) Puits de potentiel harmonique

On a tracé ci-après la courbe $E_p(x) = \frac{1}{2}kx^2$ pour un système masse-ressort. La ligne horizontale en pointillés correspond à la valeur de l'énergie mécanique E_m.

– Justifier que le mouvement est borné et déterminer les valeurs limites de x pour $E_m = 2.10^{-4}$ J.

Le mouvement n'est possible que dans le domaine où $E_m \geqslant E_p$: $-2 \text{ cm} \leqslant x \leqslant 2 \text{ cm}$

– Déterminer l'énergie cinétique maximale atteinte au cours du mouvement. Pour quelle position est-elle atteinte ?

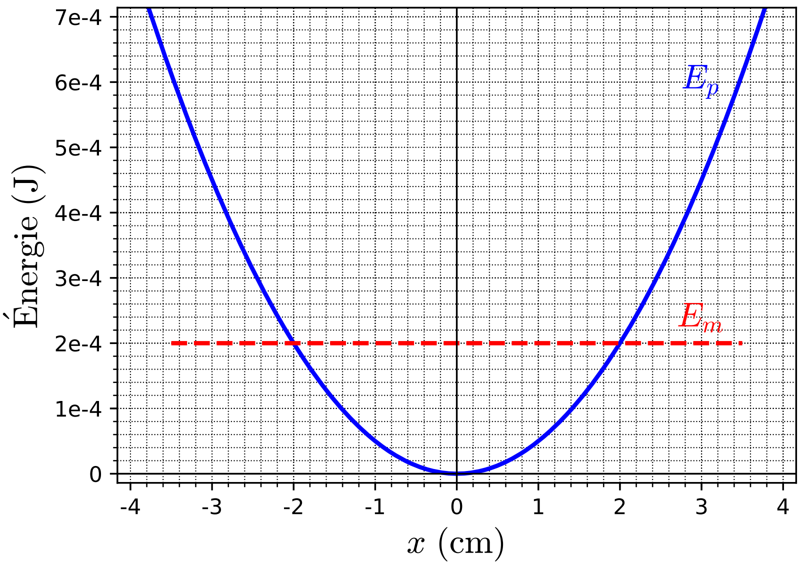
L'énergie cinétique maximale est atteinte lorsque l'énergie potentielle est minimale soit pour $x = 0$.

$$E_{\text{cmax}} = 2.10^{-4} \text{ J}$$

– Déterminer l'énergie cinétique pour $x = 1$ cm.

Pour $x = 1$ cm on lit graphiquement $E_p = 0,5.10^{-4}$ J.

On en déduit $E_c = E_m - E_p = 2,0.10^{-4} - 0.5.10^{-4} = 1,5.10^{-4}$ J



I.2. Équation du mouvement

Le mouvement étant conservatif $E_m = cte$

$$E_m = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = cte$$

On dérive par rapport au **temps** :

$$\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\cancel{2}}m\cancel{2}\dot{x}\ddot{x} + \frac{1}{\cancel{2}}k\cancel{2}x\dot{x} = 0$$

$$\dot{x}\left(m\ddot{x} + kx\right) = 0$$

La solution $\dot{x} = 0 \ \forall t$ n'est pas intéressante. Il reste :

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

qu'on peut écrire sous la forme :

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

Déterminons la dimension de $\frac{k}{m}$:

$\ddot{x}$ est homogène à une accélération $[\ddot{x}] = L.T^{-2}$ donc, les termes d'une somme ayant tous même dimension, $[\frac{k}{m}x] = L.T^{-2}$ également. On en déduit, x étant homogène à une longueur, $[\frac{k}{m}] = T^{-2}$.

On pose alors $\frac{k}{m} = \omega_0^2$ avec ω_0 homogène à l'inverse d'un temps, soit $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$.

L'équation s'écrit sous la forme :

$$\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0} \qquad \text{(OH)}$$

C'est l'**équation de l'oscillateur harmonique**. C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 2, homogène, à coefficients constants.

ω_0 est appelée **pulsation propre** de l'oscillateur.

I.3. Solution de l'équation de l'oscillateur harmonique

Lien vidéo: cours de Walter Levine "Ressorts, pendules, mouvement harmonique" (8 min 50s).

On envisage une solution sinusoïdale.
Vérifions que $x = x_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$ est solution de (OH) :

$x(t) = x_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$

$\dot{x}(t) = -x_m\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$

$\ddot{x}(t) = -\omega_0^2 x_m \cos(\omega_0 t + \varphi) = -\omega_0^2\, x(t)$

On retrouve bien $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$.

On peut écrire de manière équivalente $x(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t$ *(voir poly signal sinusoïdal)*.

Les valeurs de A et B (ou x_m et φ) dépendent des conditions initiales en position et en vitesse :

à $t = 0$ $\begin{cases} x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = v_0 \end{cases}$

$\dot{x}(t) = -A\omega_0 \sin\omega_0\, t + B\omega_0 \cos\omega_0\, t$

À $t = 0$ $\begin{cases} x(0) = A = x_0 \\ \dot{x}(0) = B\omega_0 = v_0 \end{cases}$

on en déduit $A = x_0$ et $B = \dfrac{v_0}{\omega_0}$ et donc : $\boxed{x(t) = x_0 \cos\omega_0\, t + \dfrac{v_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t}$.

En déduire l'amplitude x_m des oscillations :

$$\sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}}\left(\cos\omega_0 t\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}}} + \sin\omega_0 t\frac{\frac{v_0}{\omega_0}}{\sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}}}\right) = x_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

en identifiant

$$x_m = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}}$$

Cas particuliers :

– on lâche la masse m depuis $x(0) = x_0$ sans vitesse initiale ($v_0 = 0$) : $\boxed{x(t) = x_0 \cos\omega_0\, t}$.

– on lance la masse depuis sa position d'équilibre $x(0) = 0$ avec une vitesse initiale v_0 : $\boxed{x(t) = \dfrac{v_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t}$.

Remarque : La période des oscillations $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ est indépendante de l'amplitude des oscillations. Par exemple, si on double l'amplitude, la période des oscillations reste inchangée. On dit qu'il y a **isochronisme des oscillations**.

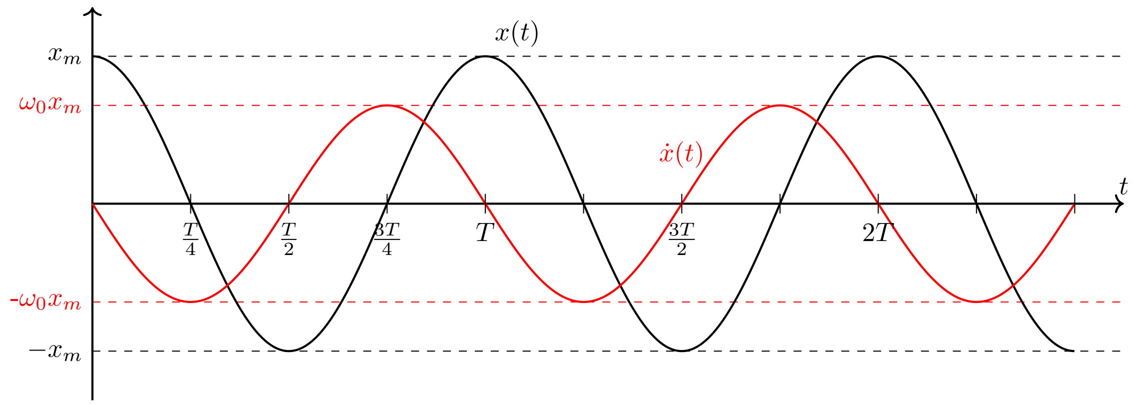
I.4. Étude du mouvement

On se place dans le cas où $x(t) = x_m \cos \omega_0 t$. On en déduit :

$$\boxed{-x_m \leqslant x \leqslant x_m}$$

La vitesse a pour expression $\dot{x}(t) = -x_m \omega_0 \sin \omega_0 t$. On en déduit :

$$\boxed{-x_m\omega_0 \leqslant \dot{x} \leqslant x_m\omega_0}$$

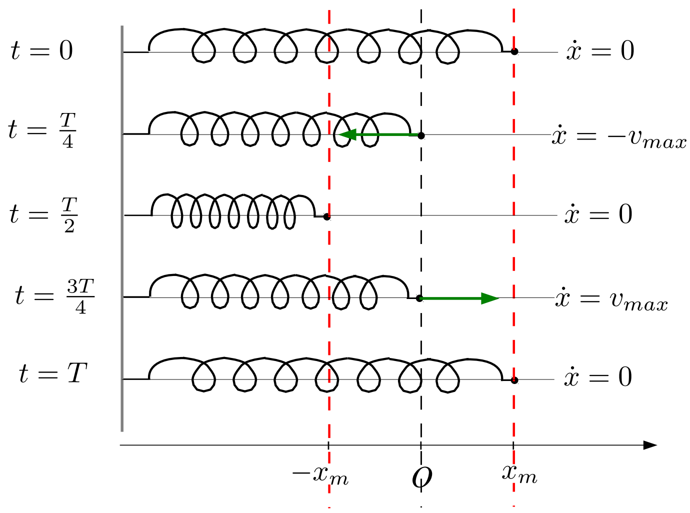


La vitesse s'annule pour chaque position extrémale :

$$\boxed{\dot{x} = 0 \text{ pour } x = \pm x_m}$$

La vitesse est maximale (en valeur absolue) lors de chaque passage à la position d'équilibre $x = 0$:

$$\boxed{\dot{x} = \pm\omega_0 x_m \text{ pour } x = 0}$$



I.5. Étude énergétique

On écrit la solution de (OH) sous la forme : $x(t) = x_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$.

$\dot{x}(t) = -x_m\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kx_m^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi)$$

$$E_c = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2 x_m^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi) = \frac{1}{2}\cancel{m}\frac{k}{\cancel{m}}x_m^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi) = \frac{1}{2}kx_m^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi)$$

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}kx_m^2 \underbrace{(\cos^2(\omega_0 t + \varphi) + \sin^2(\omega_0 t + \varphi))}_{=1} = \frac{1}{2}kx_m^2$$

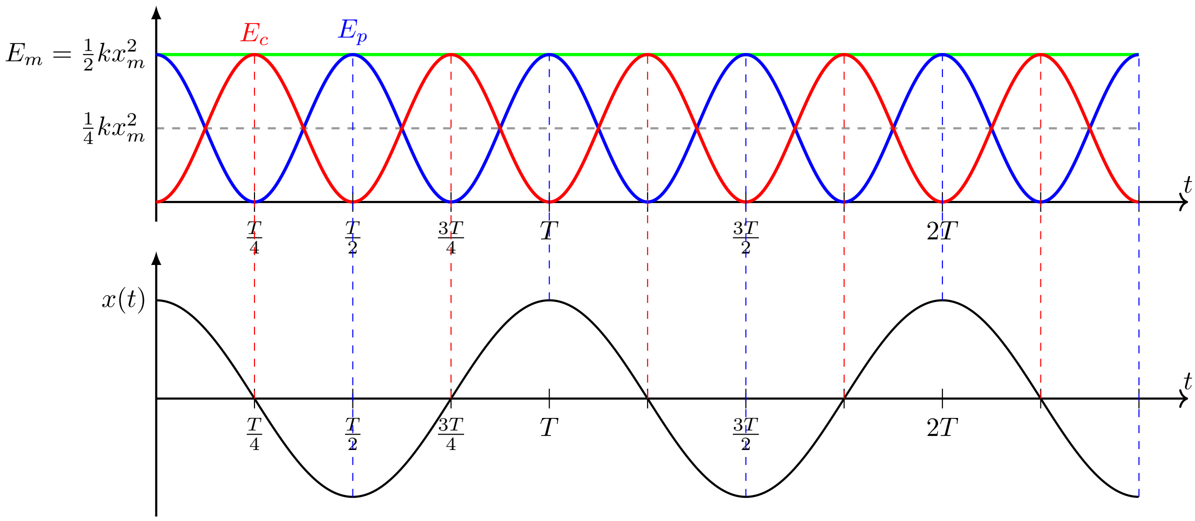
$$\boxed{E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}kx_m^2 = cte}$$

On vérifie que l'énergie mécanique est constante au cours du mouvement. Sa valeur se retrouve facilement en considérant une des positions extrémales de la masse (où $x = \pm x_m$ et $\dot{x} = 0$). On a alors $E_c = 0$ et donc $E_m = E_p = \frac{1}{2}kx_m^2$.

Au cours du mouvement il y a conversion de l'énergie cinétique en énergie potentielle et réciproquement.

L'énergie potentielle est maximale lorsque la masse occupe les positions extrémales ($E_c = 0$).

L'énergie cinétique est maximale lorsque la masse passe par sa position d'équilibre en $x = 0$ ($E_p = 0$).

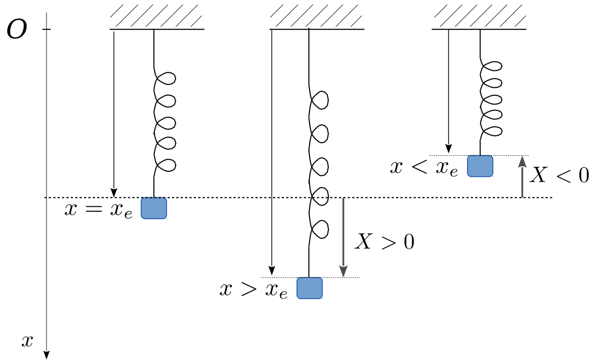


On peut calculer les valeurs moyennes :

$$\langle E_p >= \frac{1}{2}k\langle x_m^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi)\rangle = \frac{1}{2}kx_m^2 \underbrace{\langle\cos^2(\omega_0 t + \varphi)\rangle}_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}kx_m^2$$

$$\langle E_c >= \frac{1}{2}m\langle x_m^2 \underbrace{\omega_0^2}_{=\frac{k}{m}} \sin^2(\omega_0 t + \varphi)\rangle = \frac{1}{2}\cancel{m}x_m^2 \frac{k}{\cancel{m}} \underbrace{\langle\sin^2(\omega_0 t + \varphi)\rangle}_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}kx_m^2$$

I.6. Ressort vertical



Système : masse m

Référentiel : référentiel du labo supposé galiléen

Bilan des forces :

- poids (force conservative)
- tension du ressort (force conservative)
- on suppose les frottements négligeables

On a choisi l'origine des x au point de fixation du ressort. La longueur du ressort vaut donc $\ell = x$.

Au cours du mouvement seuls le poids et la tension du ressort travaillent. Ce sont des forces conservatives donc $\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}_{nc} = 0 \Rightarrow E_m = cte$: le mouvement est conservatif. On exprime E_m :

$$E_m = -mgx + \frac{1}{2}k(x-\ell_0)^2 + \frac{1}{2}mv^2 + cte = -mgx + \frac{1}{2}k(x-\ell_0)^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + cte$$

On peut établir l'équation du mouvement en exprimant $\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}_{nc} = 0$.

$$\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = -mg\dot{x} + \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}k(x-\ell_0)\dot{x} + \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}m\dot{x}\ddot{x} = 0$$

$$\dot{x}\left(-mg + k(x-\ell_0) + m\ddot{x}\right) = 0$$

La solution $\dot{x} = 0$ $\forall t$ est sans intérêt. On obtient l'équation du mouvement :

$$\boxed{-mg + k(x-\ell_0) + m\ddot{x} = 0} \qquad \text{(E)}$$

À l'équilibre : $x = x_e$, $\dot{x} = 0$, $\ddot{x} = 0$. D'où :

$$\boxed{-mg + k(x_e-\ell_0) = 0} \qquad \text{(CE)}$$

d'où $\boxed{x_e = \ell_0 + \frac{mg}{k}}$. On vérifie que $x_e > \ell_0$: le ressort est bien étiré.

Remarque : si on souhaite seulement déterminer x_e, il suffit d'exprimer la relation $\left(\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x}\right)_{x=x_e} = 0$

On s'intéresse au mouvement par rapport à la position d'équilibre. Pour cela on note $X = x - x_e$, l'écart par rapport à la position d'équilibre. On a $\dot{X} = \dot{x}$, $\ddot{X} = \ddot{x}$.
On obtient, en calculant la différence (E)-(CE) :

$$k(x - x_e) + m\ddot{x} = 0$$

$$kX + m\ddot{X} = 0$$

$$\ddot{X} + \frac{k}{m}X = 0$$

$$\boxed{\ddot{X} + \omega_0^2 X = 0}$$

On retrouve l'équation de l'oscillateur harmonique (OH), qui admet des solutions de la forme :

$$X(t) = X_m\cos(\omega t + \varphi) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t$$

On en déduit $x(t) = x_e + X(t) = x_e + X_m\cos(\omega_0 t + \varphi) = x_e + A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t$

I.7. Généralisation

L'équation du mouvement harmonique s'exprime dans le cas général sous la forme :

$$\ddot{x} + \omega_0^2\, x = K$$

où K est une constante homogène à une accélération.
À l'équilibre $x = x_e$, $\dot{x} = 0$, $\ddot{x} = 0$. On en déduit la relation $\omega_0^2\, x_e = K$ et on réécrit l'équation sous la forme

$$\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2\, x = \omega_0^2\, x_e}$$

$$\ddot{x} + \omega_0^2\, (x - x_e) = 0$$

En posant $X = x - x_e$, $\ddot{X} = \ddot{x}$, on retrouve l'équation (OH) $\ddot{X} + \omega_0^2\, X = 0$. On en déduit

$$\boxed{x(t) = x_e + X(t) = x_e + X_m \cos(\omega_0 t + \varphi) = x_e + A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) \quad \text{avec } x_e = \frac{K}{\omega_0^2}}$$

x_e est la solution particulière de l'équation avec second membre.

II. Portrait de phase

a) Définition

On considère un système mécanique à un degré de liberté (linéaire x ou angulaire θ) dont l'équation du mouvement peut se mettre sous la forme $\ddot{x} = f(x, \dot{x})$ ou $(\ddot{\theta} = f(\theta, \dot{\theta}))$. À conditions initiales $(x(0), \dot{x}(0))$ (ou $(\theta(0), \dot{\theta}(0))$ données, la solution existe et est unique : le mouvement ultérieur est dont totalement déterminé par les conditions initiales. On a un système déterministe.

• L'état de ce système est caractérisé par un point figuratif P dans un plan de coordonnées $(x, \dot{x})$ (ou $(\theta, \dot{\theta})$ dit **plan de phase**.

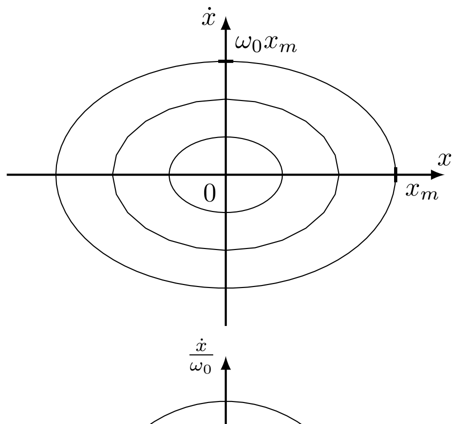
• On décrit l'évolution du système au cours du temps, pour des conditions initiales données, par la trajectoire dite **trajectoire de phase** du point P dans le plan de phase.

• L'ensemble des trajectoires de phase correspondant aux diverses conditions initiales $((x_0, \dot{x}_0)$ ou $(\theta_0, \dot{\theta}_0)$ en $P_0)$ constitue le **portrait de phase du système**.

b) Exemple de l'oscillateur harmonique

$$P \left| \begin{array}{l} X_P(t) = x(t) = x_m \cos(\omega_0 t + \varphi) \\ Y_P(t) = \dot{x}(t) = -x_m \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) \end{array} \right.$$

Chaque trajectoire de phase est une ellipse associée à une valeur donnée x_m des oscillations, donc à une valeur donnée de l'énergie mécanique $E_m = \frac{1}{2} k x_m^2$.



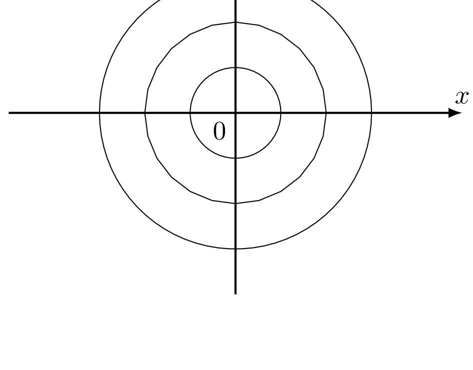
On peut choisir choisir en ordonnée $\frac{\dot{x}}{\omega_0}$ au lieu de $\dot{x}$. Dans ce cas l'abscisse et l'ordonnée ont même dimension.

$$P \left| \begin{array}{l} X_P(t) = x(t) = x_m \cos(\omega_0 t + \varphi) \\ Y_P(t) = \dfrac{\dot{x}(t)}{\omega_0} = -x_m \sin(\omega_0 t + \varphi) \end{array} \right.$$

dans ce cas

$X_P^2 + Y_P^2 = x_m^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi) + x_m^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi) = x_m^2$

une trajectoire de phase correspond à un cercle de centre O, de rayon x_m, associé à une valeur de l'énergie mécanique $E_m = \frac{1}{2} k x_m^2$.



Quelques questions :

– Préciser le sens de parcours d'une trajectoire de phase en le justifiant.

sens horaire : dans le demi-espace $\dot{x} > 0$, $x \nearrow$;

dans le demi-espace $\dot{x} < 0$, $x \searrow$;

– Pourquoi observe-t-on une trajectoire fermée dans le cas d'un mouvement oscillant ?

Parce que le mouvement est périodique. Au bout d'une période $x(t+T) = x(t)$, $\dot{x}(t+T) = \dot{x}(t)$: le point P retrouve sa position initiale.

– Où se trouve nécessairement la position d'équilibre ? Où se situe celle de l'exemple étudié ? En quoi voit-on que c'est une position d'équilibre stable ?

À l'équilibre $\dot{x} = 0$: la position d'équilibre se situe nécessairement sur l'axe horizontal. Celle de l'exemple étudié se situe en $x = 0$. C'est une position d'équilibre stable car on observe un mouvement oscillant au voisinage de cette position : le mouvement reste donc borné au voisinage de l'équilibre.

– Pourquoi deux trajectoires de phase ne se coupent-elles pas ?

Parce qu'à conditions initiales données la solution existe et est unique : deux trajectoires de phase différentes ne peuvent partir d'un même point $P_0(x_0, \dot{x}_0)$.

Quelques observations complémentaires :

– Le portrait de phase étudié ici est **symétrique par rapport à l'axe horizontal**. Cela traduit la conservation de l'énergie car **le mouvement est conservatif**.

En effet pour une valeur de x donnée, deux valeurs opposées de $\dot{x}$ sont possibles :

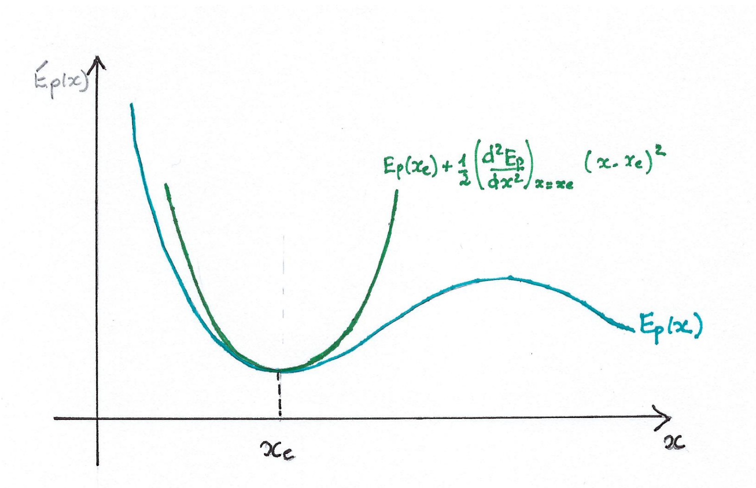
$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + E_p(x)$$

$$\dot{x} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}(E_m - E_p(x))}$$

– Une trajectoire de phase coupe l'axe perpendiculairement l'axe horizontal lorsque ce point d'intersection ne correspond pas à une position d'équilibre mais à une des positions extrémales du mouvement, où la vitesse s'annule et change de signe. En ces points la force s'exerçant sur le point matériel n'est pas nulle.

III. Approximation harmonique

Beaucoup de puits de potentiels peuvent être approximés par des puits de potentiels harmoniques grâce à un développement limité à l'ordre 2 au voisinage de l'équilibre.



III.1. Développement limité

Développement limité à l'ordre n de la fonction f au voisinage de x_0 :

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2}f''(x_0) + \cdots + \frac{(x - x_0)^n}{n!}f^n(x_0)$$

III.2. Équation du mouvement au voisinage de l'équilibre stable

On considère un mouvement conservatif à 1 dimension. On note x la variable d'espace :

$$E_m = E_c + E_p(x) = cte$$

À l'équilibre $x = x_e$ tel que $\left(\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x}\right)_{x=x_e} = 0$.

On approxime l'énergie potentielle par son développement limité à l'ordre 2 au voisinage de la position d'équilibre $x = x_e$:

$$E_p(x) = E_p(x_e) + \underbrace{(x - x_e)\left(\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x}\right)_{x=x_e}}_{=0} + \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}x^2}\right)_{x=x_e}(x - x_e)^2$$

$$E_p(x) = E_p(x_e) + \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}x^2}\right)_{x=x_e}(x - x_e)^2$$

On obtient ainsi une expression approchée de l'énergie mécanique :

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + E_p(x_e) + \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}x^2}\right)_{x=x_e}(x - x_e)^2$$

Le mouvement étant conservatif $\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = 0$.

$$\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}\dot{x}\ddot{x} + 0 + \frac{1}{\cancel{2}}\left(\frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}x^2}\right)_{x=x_e}\cancel{2}(x - x_e)\dot{x} = 0$$

$$\dot{x}\left[m\ddot{x} + \left(\frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}x^2}\right)_{x=x_e}(x - x_e)\right] = 0$$

La solution $\dot{x} = 0\ \forall t$ est sans intérêt. On conserve donc

$$m\ddot{x} + \left(\frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}x^2}\right)_{x=x_e}(x - x_e) = 0$$

On note $X = x - x_e$ l'écart par rapport à la position d'équilibre : $\dot{X} = \dot{x}$ et $\ddot{X} = \ddot{x}$.

$$m\ddot{X} + \left(\frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}x^2}\right)_{x=x_e}X = 0$$

ce qui, mis sous une forme plus "photogénique" (on choisit un coefficient multiplicatif égal à 1 devant $\ddot{x}$) , donne

$$\ddot{X} + \frac{1}{m}\left(\frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}x^2}\right)_{x=x_e}X = 0$$

On se place dans le cas où $\left(\frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}x^2}\right)_{x=x_e} > 0$: la position d'équilibre correspond à un minimum d'énergie potentielle $\rightarrow$ l'équilibre est stable.

On pose $\omega_0^2 = \frac{1}{m}\left(\frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}x^2}\right)_{x=x_e}$

On obtient ainsi l'équation de l'oscillateur harmonique (OH)

$$\ddot{X} + \omega_0^2 X = 0$$

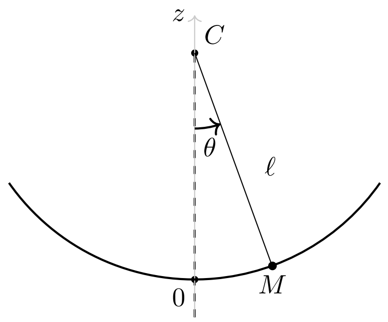
avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{m}\left(\frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}x^2}\right)_{x=x_e}}$ la pulsation des oscillations au voisinage de l'équilibre.

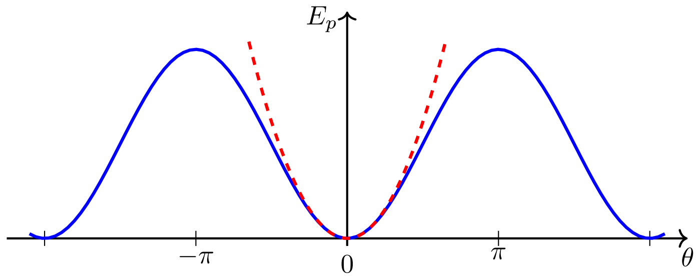
Remarque : dans certains cas on observe un équilibre stable (donc un minimum d'énergie potentielle) en $x = x_e$ avec $\left(\frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}x^2}\right)_{x=x_e} = 0$. Dans ce cas, on ne peut plus approximer la courbe par un puits de potentiel harmonique. Il faut faire un développement limité à un ordre plus élevé pour établir l'équation du mouvement au voisinage de l'équilibre et les oscillations au voisinage de l'équilibre sont plus harmoniques.

III.3. Pendule simple

On considère un pendule simple constitué d'une masse m, placée à l'extrémité d'une barre rigide de masse négligeable. On suppose que la rotation s'effectue sans frottement : le mouvement est conservatif $E_m = cte$.

Sur l'animation suivante on annule les frottements en choisissant $\lambda = 0$.
`https://phyanim.sciences.univ-nantes.fr/Meca/Oscillateurs/pend_pesant1.php`





$E_p = mgz_M = mg\ell(1-\cos\theta)$ si on choisit $E_p = 0$ en $z = 0$.

On constate graphiquement que $\theta = 0\ [2\pi]$ est une position d'équilibre stable et que $\theta = \pi\ [2\pi]$ est une position d'équilibre instable.

Développement limité de E_p à l'ordre 2 au voisinage de 0 :

– à l'ordre 2 au voisinage de 0 : $\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2}$

$E_p = mg\ell\left(1-(1-\dfrac{1}{2}\theta^2)\right) = mg\ell\dfrac{\theta^2}{2}$ (courbe en pointillés)

$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 + mg\ell\frac{1}{2}\theta^2$

En l'absence de frottements : $\dfrac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}_{nc} = 0$.

$E_m = E_c + E_p = \dfrac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 + mg\ell\dfrac{\theta^2}{2}$

$\dfrac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{\cancel{2}}m\cancel{2}\ell^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + mg\ell\dfrac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}\theta\dot{\theta} = m\ell\dot{\theta}\left[\ell\ddot{\theta} + g\theta\right] = 0$

$\ell\ddot{\theta} + g\theta = 0$

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\theta = 0}$$

En posant $\omega_0^2 = \dfrac{g}{\ell}$, soit $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\dfrac{g}{\ell}}}$ on retrouve l'équation de l'oscillateur harmonique (OH) :

$$\boxed{\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0}$$

On obtient, pour des petites oscillations, une période $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ indépendante de l'amplitude. Il y a **isochronisme des petites oscillations**.

Pour des oscillations d'amplitude plus élevée, la formule approchée du développement limité n'est plus valable. Pour établir l'équation du mouvement il faut revenir à l'expression de l'énergie potentielle.

$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 + mg\ell(1-\cos\theta)$

$$\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\cancel{2}}m\cancel{2}\ell^2\dot{\theta}\ddot{\theta} - mg\ell(-\sin\theta)\dot{\theta} = mg\ell\dot{\theta}\left[\ell\ddot{\theta} + g\sin\theta\right] = 0$$

La solution $\dot{\theta} = 0$ $\forall t$ est sans intérêt.

$\ell\ddot{\theta} + g\sin\theta = 0$

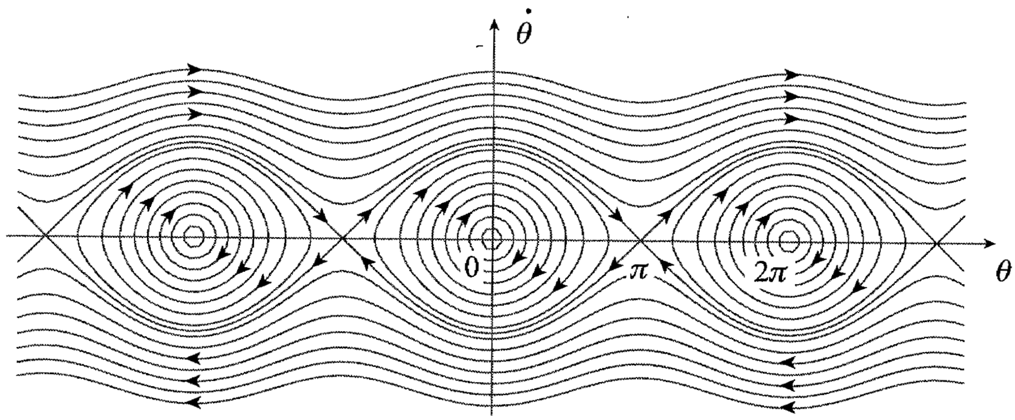
$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0} \qquad \text{(EPS)}$$

L'équation du pendule simple (EPS) n'est pas une équation linéaire. On n'observe plus l'isochronisme des oscillations. Voir l'animation :
`https://phyanim.sciences.univ-nantes.fr/Meca/Oscillateurs/periode_pendule.php`
La période des oscillations augmente quand l'amplitude augmente.

Remarque : pour $\theta \ll 1$ rad, $\sin\theta \simeq \theta$ et on retrouve l'équation $\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\theta = 0$.

III.4. Portait de phase du pendule simple

On peut le visualiser à l'aide de l'animation suivante (en choisissant $\lambda = 0$) :
`https://phyanim.sciences.univ-nantes.fr/Meca/Oscillateurs/pend_pesant1.php`



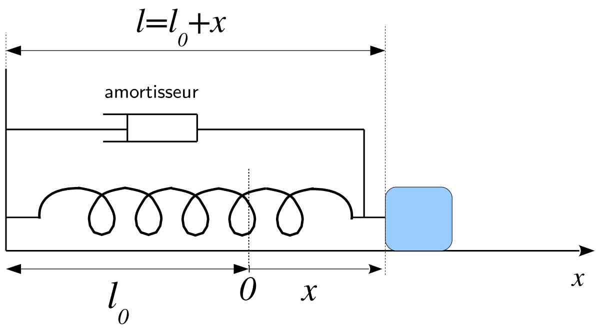
Interpréter les différentes trajectoires de phase observées.

Qu'observe-t-on au niveau des positions d'équilibre stables et des positions d'équilibre instables ?

IV. Oscillations amorties

On considère à nouveau les oscillations horizontales d'une masse accrochée à un ressort, mais on ajoute désormais un amortisseur qui crée une force d'amortissement de type visqueux opposée à la vitesse $\vec{F_a} = -\alpha\vec{v}$ et de puissance $-\alpha v^2$. On considère qu'il n'y a pas de frottements entre la masse et le plan.

IV.1. Équation du mouvement



Système : masse m

Référentiel : référentiel du labo supposé galiléen

Bilan des forces :

- poids (force conservative qui ne travaille pas car elle reste perpendiculaire au mouvement)
- réaction normale du support (ne travaille pas)
- tension du ressort (force conservative)
- force d'amortissement (force non conservative qui travaille)

D'après le théorème de la puissance mécanique (TPM) :

$$\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}_{nc} = -\alpha v^2$$

avec $E_m = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2$.

$$\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\cancel{2}}m\cancel{2}\dot{x}\ddot{x} + \frac{1}{\cancel{2}}k\cancel{2}x\dot{x} = -\alpha\dot{x}^2$$

$$\dot{x}\left(m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx\right) = 0$$

la solution $\dot{x} = 0$ $\forall t$ étant sans intérêt, il reste :

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

que l'on peut écrire sous **forme canonique** :

$$\boxed{\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0} \qquad \text{(E0)}$$

avec : $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ et $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{\alpha}{m}$.

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}} \quad \text{et} \quad \boxed{Q = \frac{m\omega_0}{\alpha} = \frac{\sqrt{km}}{\alpha}}.$$

- ω_0 **pulsation propre** du système : c'est la pulsation qu'auraient les oscillations en l'absence de frottement ($\alpha = 0$ $Q \to \infty$. pour $\alpha = 0$ on retrouve l'équation de l'OH : $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$).
- Q **facteur de qualité :** moins il y a d'amortissement ($\alpha \searrow$), plus le facteur de qualité est élevé ($Q \nearrow$).

IV.2. Les différents types de solutions

Avant de poursuivre, lire le polycopié "Résolution d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants".

L'équation obtenue est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants, homogène (c'est à dire avec un second membre nul) : on la note (E0). On lui associe l'équation caractéristique :

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0$$

qui admet pour discriminant : $\Delta = \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 - 4\omega_0^2$.

La nature des solutions de (E0) dépendra du signe de Δ.

Si on se place à ω_0 fixée (k et m fixés), le signe de Δ dépendra uniquement de la valeur de Q et donc de la valeur du coefficient d'amortissement α.

a) Cas $\Delta < 0$ (amortissement faible)

$\Delta = \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 - 4\omega_0^2 < 0$

$\left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 < 4\omega_0^2$

$Q^2 > \frac{1}{4}$

$$\boxed{Q > \frac{1}{2}}$$

Or $Q = \frac{\sqrt{km}}{\alpha}$ d'où $\frac{\sqrt{km}}{\alpha} > \frac{1}{2}$ soit $\boxed{\alpha < 2\sqrt{km}}$

On a deux racines complexes conjuguées :

$r_{1,2} = \frac{1}{2}\left(-\frac{\omega_0}{Q} \pm i\sqrt{-\Delta}\right)$

$r_{1,2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \frac{i}{2}\sqrt{4\omega_0^2 - \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \frac{i}{2}\sqrt{4\omega_0^2\left(1 - \frac{1}{4Q^2}\right)}$

$r_{1,2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm i\omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$

$r_{1,2} = -\boldsymbol{\frac{\omega_0}{2Q}} \pm i\boldsymbol{\omega}$ avec $\boxed{\omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$ pseudo-pulsation ($\omega < \omega_0$ et $\omega \simeq \omega_0$ pour $Q \geqslant 5$).

$$\boxed{x(t) = e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\left(A\cos\omega t + B\sin\omega t.\right)}$$

Les constantes A et B se déduisent des conditions initiales.

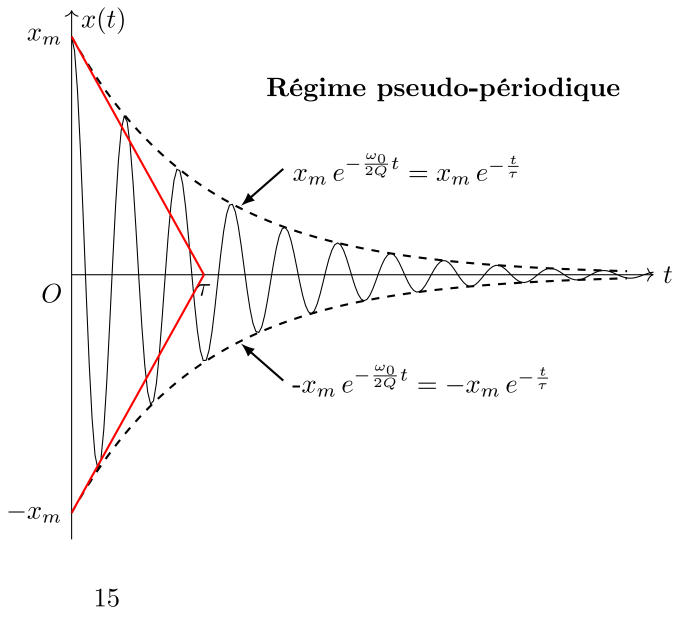
On peut écrire de manière équivalente : $x(t) = e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} x_m \cos(\omega t + \varphi)$. On peut alors tracer l'allure de la solution

$$\boxed{x(t) = x_m e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\cos(\omega t + \varphi)}$$

Pseudo-période :

$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$

pour $Q \geqslant 5$, $T \simeq T_0$ à mieux d'1% près.



Interprétation graphique du facteur de qualité

On peut introduire un temps caractéristique τ de décroissance de l'exponentielle tel que $x_m e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} = x_m e^{-\frac{t}{\tau}}$ avec $\tau = \dfrac{2Q}{\omega_0}$

Pour $t > 3\tau$, l'amplitude des oscillations est inférieure à $0,05x_m$. On compte le nombre de pseudo-oscillations d'amplitude supérieure à $0.05x_m$ s'étant produites pendant 3τ :

$\dfrac{3\tau}{T} = \dfrac{3 \times 2Q}{\omega_0 T}$

On suppose le régime faiblement amorti : $Q \geqslant 5$ d'où $T \simeq T_0$.

$\dfrac{3\tau}{T} \simeq \dfrac{3 \times 2Q}{\omega_0 T_0}$

$\dfrac{3\tau}{T} \simeq \dfrac{3 \times 2Q}{2\pi} \simeq \dfrac{3Q}{\pi} \simeq Q$ (en prenant $\pi \simeq 3$).

Pour $Q \geqslant 5$, le facteur de qualité correspond au nombre d'oscillations d'amplitude significatives (c'est à dire d'amplitude supérieure à 5% de l'amplitude initiale). Cela permet d'estimer graphiquement le facteur de qualité.

Interprétation énergétique du facteur de qualité

L'énergie mécanique du système est progressivement dissipée en raison des frottements. On peut montrer que, pour un régime pseudo-périodique faiblement amorti ($Q \geqslant 5$, $T_0 \simeq T$) :

$$\frac{E_m(t) - E_m(t+T)}{E_m(t)} = \frac{1}{Q}$$

La variation relative de l'énergie mécanique sur une période est inversement proportionnelle au facteur de qualité. Plus le facteur de qualité est élevé, moins il y a de frottement et plus les pertes énergétiques sont faibles.

Décrément logarithmique

On peut caractériser la décroissance exponentielle de l'amplitude des oscillations par le calcul du décrément logarithmique δ défini par :

$$\delta = \frac{1}{n} \ln \frac{x(t)}{x(t+nT)} \quad n \in \mathbb{N}^*$$

Plus la décroissance est rapide, plus δ augmente. Inversement δ tend vers 0 lorsque la décroissance exponentielle est très faible.

$x(t) = e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} x_m(\cos \omega t + \varphi)$

$$\begin{aligned} x(t+nT) &= e^{-\frac{\omega_0}{2Q}(t+nT)} x_m \cos \omega((t+nT) + \varphi) \\ &= e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} e^{-\frac{\omega_0}{2Q}nT} x_m \cos(\omega t + \varphi) \\ &= e^{-\frac{\omega_0}{2Q}nT} x(t) \end{aligned}$$

d'où $\dfrac{x(t)}{x(t+nT)} = \dfrac{x(t)}{x(t)e^{-\frac{\omega_0}{2Q}nT}} = \dfrac{1}{e^{-\frac{\omega_0}{2Q}nT}} = e^{\frac{\omega_0}{2Q}nT}$

$\delta = \dfrac{1}{n} \ln \dfrac{x(t)}{x(t+nT)} = \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{\omega_0}{2Q}nT\right) = \dfrac{\omega_0 T}{2Q}$

Dans le cas d'oscillations faiblement amorties $Q \geqslant 5$, $\omega \simeq \omega_0$, $T \simeq T_0$,

$$\delta \simeq \frac{\omega_0 T_0}{2Q} = \frac{2\pi}{2Q} = \frac{\pi}{Q}$$

Plus le facteur de qualité augmente, plus le décrément logarithmique est faible.

b) Cas $\Delta = 0$ (amortissement critique)

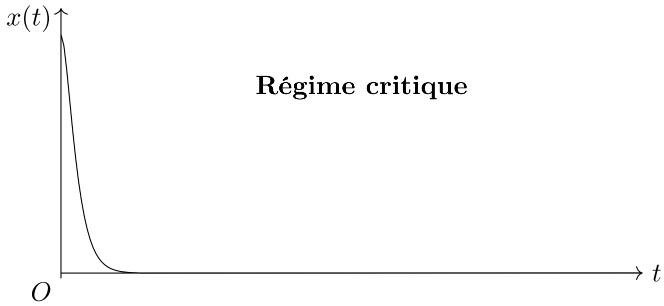
$\Delta = \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 - 4\omega_0^2 = 0$

$\boxed{Q = \frac{1}{2}}$ $\alpha = 2\sqrt{km}$

L'équation caractéristique admet une racine double $r_0 = -\frac{\omega_0}{2Q} = -\omega_0$ car $Q = \frac{1}{2}$.
Dans ce cas la solution de (E0) est de la forme :

$$\boxed{x(t) = e^{-\omega_0 t}(At + B)}$$

Les constantes A et B se déduisent des conditions initiales.



c) Cas $\Delta > 0$ (amortissement important)

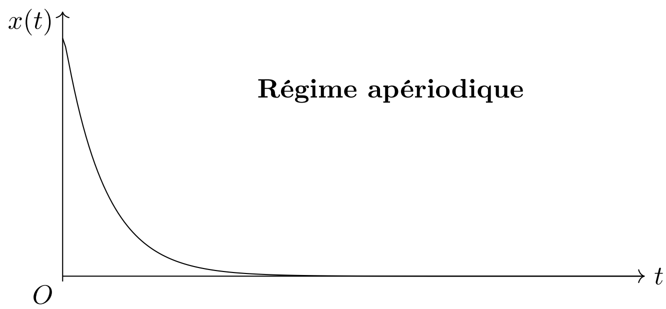
$\Delta = \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 - 4\omega_0^2 > 0$

$\boxed{Q < \frac{1}{2}}$ $\alpha > 2\sqrt{km}$

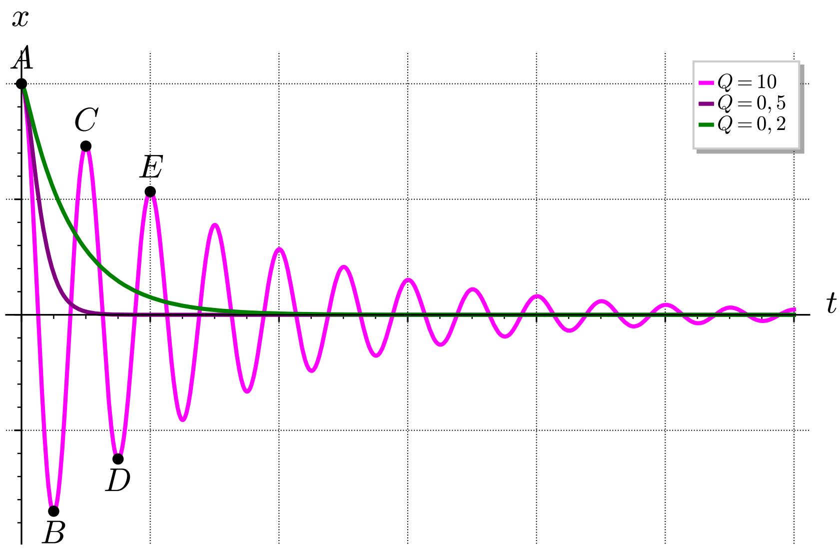
L'équation caractéristique admet deux racines réelles négatives r_1 et r_2 avec $r_{1,2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 - 4\omega_0^2}$.
On peut poser $r_1 = -\frac{1}{\tau_1}$ et $r_2 = -\frac{1}{\tau_2}$ avec $\tau_1 > 0$ et $\tau_2 > 0$, τ_1 et τ_2 étant homogène à des temps. Dans ce cas la solution de (E0) est de la forme :

$$\boxed{x(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t} = Ae^{-\frac{t}{\tau_1}} + Be^{-\frac{t}{\tau_2}}}$$

Les constantes A et B se déduisent des conditions initiales.
On fait donc la somme de deux exponentielles décroissantes.

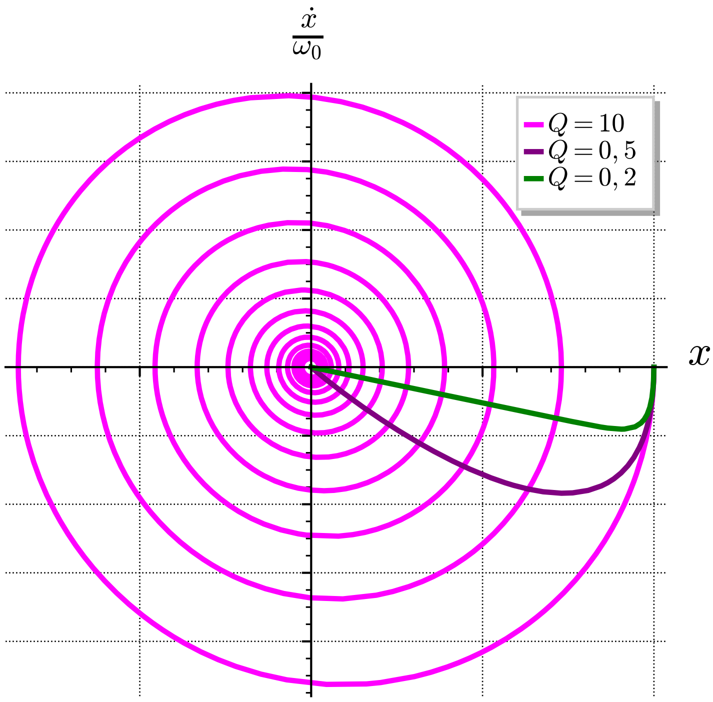


Comparaison des trois régimes :



C'est pour le régime critique que le retour à la position d'équilibre (ici $x = 0$) se fait le plus rapidement.

d) Portrait de phase



Placer les points A, B, C, D et E sur le portrait de phase.

IV.3. Généralisation

L'origine des x ne coïncide pas toujours avec la position d'équilibre. Dans le cas le plus général, l'équation du mouvement de l'oscillateur amorti s'écrit sous la forme

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = K \quad (E)$$

avec K une constante.

On lui associe l'équation homogène (équation sans second membre)

$$\ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \quad (E0)$$

À l'équilibre, $x = x_e$, $\dot{x} = 0$, $\ddot{x} = 0$. L'équation (E) devient $\omega_0^2 x_e = K$.

On peut donc exprimer l'équation (E) sous sa forme équivalente :

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_e \quad (E)$$

La solution générale de (E) est la superposition

– d'une solution particulière de (E) constante (car $K = cte$) :

$$\omega_0^2 x_p = K = \omega_0^2 x_e$$

$$x_p = x_e$$

La solution particulière correspond à la position d'équilibre.

– de la solution générale de $(E0)$ dont la nature dépend du signe de Δ, discriminant de l'équation caractéristique.

Le résultat final s'exprime donc sous la forme :

$$x(t) = x_e + \begin{cases} e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\left(A\cos\omega t + B\sin\omega t\right) & \text{si } \Delta < 0 \quad \text{régime pseudo-périodique} \\ e^{-\omega_0 t}(At + B) & \text{si } \Delta = 0 \quad \text{régime critique} \\ Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t} \text{ avec } r_1 < 0 \text{ et } r_2 < 0 & \text{si } \Delta > 0 \quad \text{régime apériodique} \end{cases}$$

avec $x_e = x_p = \frac{K}{\omega_0^2}$.

Les constantes A et B se déduisent ensuite des conditions initiales en position et en vitesse : $x(0) = x_0$ et $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$.

En régime permanent (ou établi), le terme correspondant à la solution de $(E0)$ s'est éteint et il reste $x = x_e$.

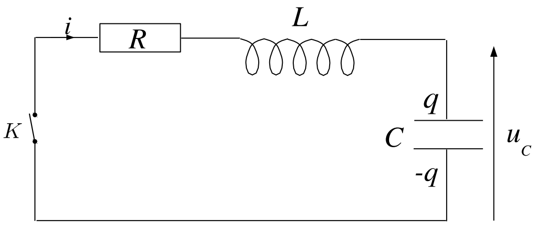
Remarque : point de vue des sciences de l'ingénieur.

En SI, la prise en compte des effets dissipatifs est plutôt traduite par le facteur d'amortissement (ou coefficient d'amortissement) qui peut être noté m, ξ ou autres... Ce coefficient est d'autant plus élevé que les phénomènes dissipatifs sont importants. On peut relier le facteur d'amortissement m au facteur de qualité Q par la relation :

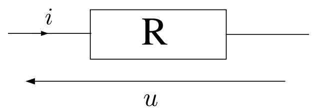
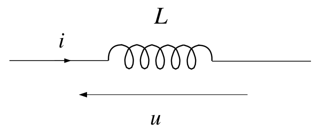
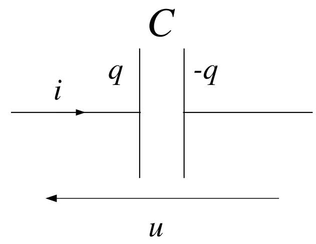
$$2m = \frac{1}{Q}$$

V. Analogie électrique

On peut rencontrer en électricité une équation comparable à l'équation de l'oscillateur amorti. On considère le circuit électrique ci-dessous.



avec R la résistance du résistor, L l'inductance de la bobine, C la capacité du condensateur. On donne ci-dessous les relations courant-tension en convention récepteur (u et i orientés dans des directions opposées) :

		
$u = Ri$	$u = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$	$u = \dfrac{q}{C}$ et $i = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$

En convention récepteur le produit $\mathcal{P} = ui$ correspond à la puissance électrique algébriquement **reçue** par le dipôle.

On suppose le condensateur initialement chargé et à $t = 0$ on ferme l'interrupteur K. On note q la charge du condensateur. On peut montrer qu'elle vérifie l'équation :

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = 0$$

Si l'on compare à l'équation du mouvement établie au IV.1. :

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = 0$$

on peut établir les équivalences :

$$q \leftrightarrow x$$
$$\dot{q} = i \leftrightarrow \dot{x} = v$$
$$L \leftrightarrow m$$
$$R \leftrightarrow \alpha$$
$$\tfrac{1}{C} \leftrightarrow k$$

D'un point de vue énergétique :

• La puissance électrique reçue par la bobine s'exprime sous la forme $\mathcal{P} = ui = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}Li^2\right) = \frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_m}{\mathrm{d}t}$ avec $\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}Li^2$ l'énergie magnétique stockée par la bobine. On a

$$\boxed{\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}Li^2 \leftrightarrow \mathcal{E}_c = \frac{1}{2}mv^2}$$

l'énergie magnétique $\mathcal{E}_m$ stockée dans la bobine est équivalente à l'énergie cinétique.

• La puissance électrique reçue par le condensateur s'exprime sous la forme $\mathcal{P} = ui = \frac{q}{C}\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\frac{q^2}{C}\right) = \frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_e}{\mathrm{d}t}$ avec $\mathcal{E}_e = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} = \frac{1}{2}Cu^2$ l'énergie électrique stockée dans le condensateur.

$$\boxed{\mathcal{E}_e = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} \leftrightarrow \mathcal{E}_p = \frac{1}{2}kx^2}$$

l'énergie électrique $\mathcal{E}_e$ stockée dans le condensateur est équivalente à l'énergie potentielle élastique du ressort.

Le bilan énergétique global s'exprime sous la forme :

$$\frac{\mathrm{d}(\mathcal{E}_m + \mathcal{E}_e)}{\mathrm{d}t} = -Ri^2 \leftrightarrow \frac{\mathrm{d}(\mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p)}{\mathrm{d}t} = -\alpha v^2$$

D'un point de vue électrique, l'énergie initialement stockée dans la bobine et le condensateur est progressivement dissipée par effet Joule dans la résistance.

Entraînez-vous :

On observe directement u_C à l'oscilloscope.

1. Établir l'équation vérifiée par u_C et l'écrire sous la forme canonique :
$$\ddot{u}_C + \frac{\omega_0}{Q}\dot{u}_C + \omega_0^2 u_C = 0$$
et en déduire les expressions de ω_0 et Q en fonction de L, R et C.
2. Déterminer l'expression de la résistance critique R_c, c'est-à-dire la résistance pour laquelle on observera un régime critique, en fonction de L et C.
3. On suppose qu'on modifie la valeur de R, à L et C fixé. Quelle sera la nature du régime observé si $R > R_c$? si $R < R_c$?

Réponses :

1. $$\ddot{u}_C + \frac{R}{L}\dot{u}_C + \frac{1}{LC}u_C = 0$$
$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$.
2. $R_c = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$
3. si $R > R_c$ régime apériodique. Si $R < R_c$ régime pseudo-périodique.

4. Oscillations libres	
Interprétation avec le graphe de l'énergie potentielle	Expliquer l'existence d'oscillations autour d'une position d'équilibre stable. Prévoir l'amplitude des oscillations et la vitesse maximale.
Oscillateur non amorti	Identifier et utiliser le modèle de l'oscillateur harmonique. Étude expérimentale d'un oscillateur harmonique.
Portrait de phase	Interpréter un portrait de phase fourni ou relevé expérimentalement.
Non conservation de l'énergie mécanique. Modèle d'ordre 2	Utiliser le modèle de l'oscillateur harmonique amorti par frottements fluides. Résoudre et interpréter les solutions de l'équation différentielle canonique. Identifier les différents régimes et exploiter les courbes. Commenter le cas où le facteur de qualité est grand devant 1. Relier facteur de qualité et facteur d'amortissement.