M3 - Énergie mécanique

I. Énergie mécanique

Lorsqu'un corps chute dans le champ de pesanteur son énergie potentielle diminue mais son énergie cinétique augmente. On peut se demander si toute l'énergie potentielle "perdue" est devenue de l'énergie cinétique. Il peut alors sembler intéressant de considérer la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle, afin de voir si cette grandeur se conserve ou non.

II. Énergie mécanique

II.1. Définition

L'**énergie mécanique** d'un point matériel M, de masse m, dans un référentiel $\mathcal{R}$ donné, est définie par

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + E_p$$

avec E_p l'énergie potentielle associée aux forces conservatives agissant sur M (par exemple : poids, force élastique).

II.2. Puissance d'une force

Pour qu'une force travaille, l'objet sur lequel elle s'applique doit être en mouvement. Si la force est perpendiculaire au déplacement de l'objet, elle ne travaille pas.

Dimensionnellement, **un travail a les dimensions d'une énergie et est homogène au produit d'une force par une longueur**. Il se mesure en joule (symbole J).

$$1\ \text{J} = 1\ \text{N.m} = 1\ \text{kg.m.s}^{-2}\text{.m} = 1\ \text{kg.m}^2\text{.s}^{-2}$$

On retrouve la même relation qu'en utilisant l'expression de l'énergie cinétique.

La **puissance** d'une force correspond au travail de cette force par unité de temps et se mesure en watt (symbole W).
Une **puissance est donc homogène à une énergie divisée par un temps ou à une force multipliée par une vitesse**.

$$1\ \text{W} = 1\ \text{J.s}^{-1} = 1\ \underbrace{\text{N}}_{force}\ .\ \underbrace{\text{m.s}^{-1}}_{vitesse} = 1\ \text{kg.m}^2\text{.s}^{-3}$$

Retenir :

Dimensionnellement :

$$[\text{Puissance}] = \frac{[\text{Energie}]}{[\text{Temps}]} = [\text{Force}] \times [\text{vitesse}]$$

Exemple : Pour produire de la lumière à l'aide de la "Gravity light" on remonte un sac lesté de 12 kg. Celui-ci redescend d'environ 1,5 m en 20 minutes. Estimer la puissance du dispositif. Pouvait-il fonctionner avec des ampoules classiques à incandescence ?

II.3. Théorème de la puissance mécanique (TPM)

Dans un **référentiel galiléen**, on peut écrire

$$\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}_{nc}$$

avec $\mathcal{P}_{nc}$ la puissance des forces **non conservatives** agissant sur M.

Remarque : on vérifie qu'une puissance est bien homogène à une énergie divisée par un temps.

Les forces non conservatives peuvent être de deux types :

- forces dissipatives :

  C'est le cas des forces de frottement qui s'opposent au mouvement $\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} < 0$: $E_m \searrow$
- forces motrices (par exemple une force de traction) qui favorisent le mouvement $\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} > 0$: $E_m \nearrow$

Une force perpendiculaire au mouvement ne travaille pas. En l'absence de frottement la réaction d'un support est perpendiculaire au plan de contact et donc ne travaille pas : sa puissance est nulle.

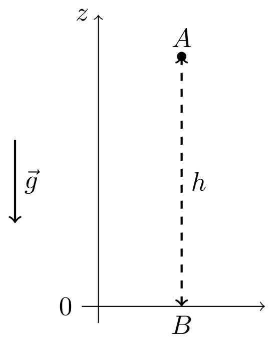
Si au cours d'un mouvement seules les forces conservatives travaillent alors l'énergie mécanique se conserve : le mouvement est dit conservatif.

III. Étude d'un mouvement conservatif

III.1. Deux exemples classiques

a) Chute libre

On lâche depuis une hauteur h une masse m avec une vitesse nulle. On souhaite calculer sa vitesse lorsqu'elle touche le sol.



Système : masse m

Référentiel : terrestre galiléen

Bilan des forces : poids (force conservative)

on néglige les frottements avec l'air.

D'après le le TPM : $\dfrac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}_{nc} = 0$

$\Rightarrow$ l'énergie mécanique se conserve $E_m = cte$.

$E_p = E_{pp} = mgz + cte = mgz$ (si on choisit $E_p = 0$ pour $z = 0$)

$$E_m(A) = E_m(B)$$

$$mgh + 0 = 0 + \frac{1}{2}mv^2$$

$$\boxed{v = \sqrt{2gh}}$$

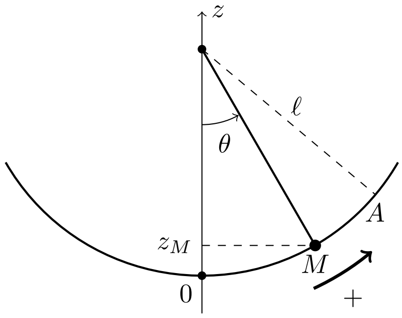
On remarque que le résultat est indépendant de la masse (masse grave=masse inerte).

Applications numériques :

- $h = 10$ m $\quad v = \sqrt{2 \times 10 \times 10} = 10\sqrt{2} = 14$ m.s^{-1} $\simeq 50$ km.h^{-1}
- $h = 100$ m $\quad v \simeq 160$ km.h^{-1} si on néglige les frottements.

b) Pendule simple

On lâche la masse m sans vitesse depuis le point A repéré par l'angle θ_0. Déterminer la vitesse en M repéré par l'angle θ, puis la vitesse maximale en précisant en quel point elle est atteinte.



Système : masse m

Référentiel : terrestre galiléen

Bilan des forces : poids (force conservative)

tension du fil (perpendiculaire à la trajectoire : elle ne travaille pas, sa puissance est donc nulle)

On néglige les frottements avec l'air.

D'après le le TPM : $\dfrac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}_{nc} = 0$.

$\Rightarrow$ l'énergie mécanique se conserve $E_m = cte$.

$E_p = E_{pp} = mgz_M + cte = mg\ell(1-\cos\theta) + cte$

$E_c = \dfrac{1}{2}mv^2$

On exprime la conservation de l'énergie mécanique :

$$E_m(A) = E_m(M)$$
$$mg\ell(1-\cos\theta_0) + \cancel{cte} + 0 = mg\ell(1-\cos\theta) + \cancel{cte} + \tfrac{1}{2}mv^2(M)$$
$$mg\ell(\cos\theta - \cos\theta_0) = \tfrac{1}{2}mv^2(M)$$

$$\boxed{v(M) = \sqrt{2g\ell(\cos\theta - \cos\theta_0)}}$$

On remarque que le résultat est indépendant de la masse m.

L'énergie cinétique est maximale lorsque l'énergie potentielle est minimale et donc au point le plus bas de la trajectoire (ici le point O). On a donc, en prenant $\theta = 0$:

$$\boxed{v_{\max} = v(O) = \sqrt{2g\ell(1-\cos\theta_0)}}$$

III.2. Analyse graphique d'un mouvement conservatif

On considère un mouvement conservatif à un degré de liberté. On peut tracer la courbe représentant E_p en fonction de la variable d'espace considérée (x, z, θ....).

Le mouvement étant conservatif :

$$E_m = E_c + E_p = \underbrace{\frac{1}{2}mv^2}_{\geqslant 0} + E_p = cte$$

$$E_m \geqslant E_p$$

Le mouvement n'est possible que dans le domaine où $E_m \geqslant E_p$. Les positions pour lesquelles $E_m = E_p$ correspondent à des points d'arrêt ($E_c = 0$).

• Considérons le profil ci-contre :

$E_m \geqslant E_p \Rightarrow$ le mouvement n'est possible que dans le domaine $[x_{min}, x_{max}]$.

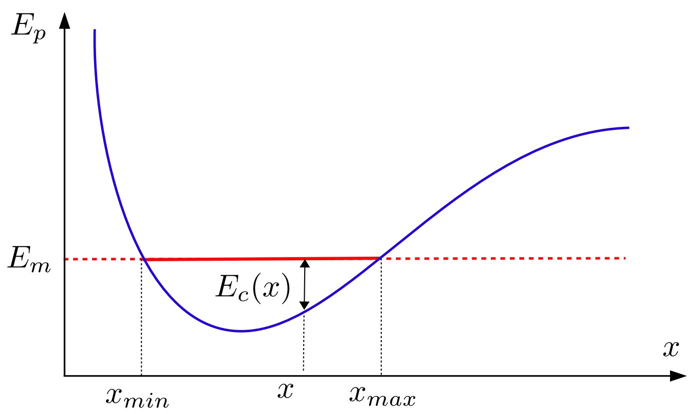
Le mouvement est borné.

On parle alors d'**état lié**.

$$x_{min} \leqslant x \leqslant x_{max}$$

En $x = x_{min}$ et $x = x_{max}$, $E_c = 0$: ces points correspondent à des points d'arrêt.

On peut déterminer graphiquement E_c pour une position x quelconque.



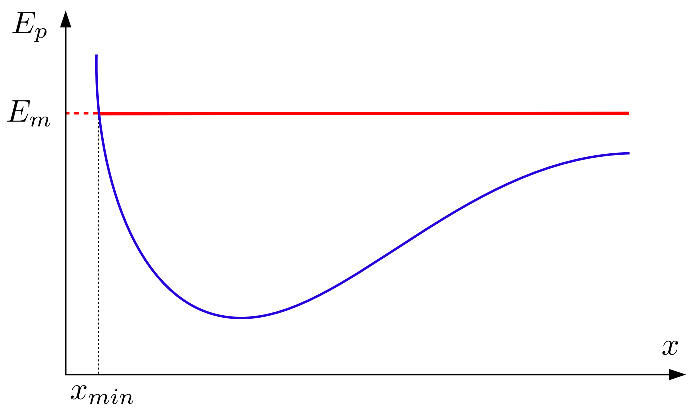
• Considérons le profil ci-contre :

Le mouvement n'admet pas de borne supérieure (il n'admet que la borne inférieure x_{min}).

$$x \geqslant x_{min}$$

Le mouvement n'est pas borné.

On parle alors d'**état de diffusion**.

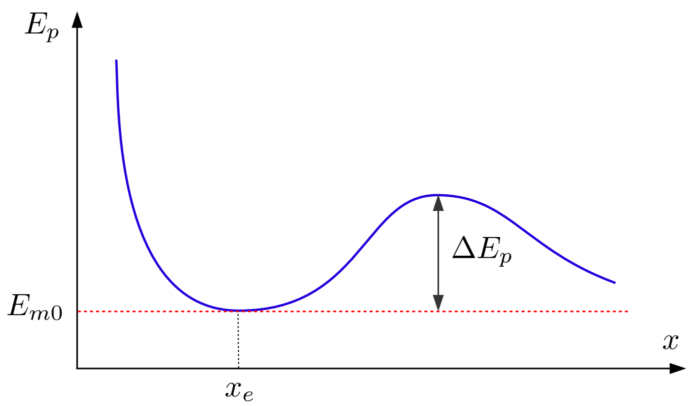


• Particule dans un puits de potentiel

On considère initialement une particule dans un état d'équilibre stable. Son énergie mécanique E_{m0} coïncide alors avec le minimum d'énergie potentielle.

On lui fournit une énergie cinétique (en lui communiquant une certaine vitesse). Quelle énergie minimale doit-on lui fournir pour que la particule s'échappe du "puits de potentiel" ?

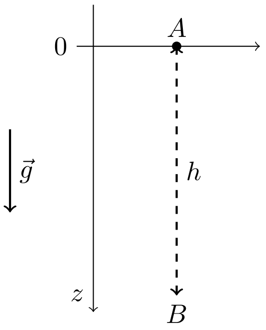
L'énergie minimale à fournir correspond à la profondeur du puits de potentiel ΔE_p.



IV. TPM et équation du mouvement

IV.1. Mouvement conservatif : chute libre

On reprend l'exemple de la chute libre. Nous avons calculé précédemment la vitesse après une hauteur de chute h. On souhaiterait à présent calculer le temps de chute. Pour cela on va établir l'équation du mouvement. On oriente l'axe Oz suivant la verticale descendante. À $t = 0$ on lâche la masse m depuis le point A sans vitesse.



Système : masse m

Référentiel : terrestre galiléen

Bilan des forces : poids (force conservative)
on néglige les frottements avec l'air.

D'après le le TPM : $\dfrac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}_{nc} = 0$
$\Rightarrow$ l'énergie mécanique se conserve $E_m = cte$.

$E_p = E_{pp} = -mgz + cte = -mgz$ (si on choisit $E_p = 0$ pour $z = 0$)

$E_m = E_p + E_c = -mgz + \frac{1}{2}mv^2$ avec $v = \dot{z}$.

L'énergie mécanique étant une constante **au cours du temps** :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = 0}$$

$$E_m = -mgz + \frac{1}{2}m\dot{z}^2$$
$$\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = -mg\dot{z} + \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}m\dot{z}\frac{\mathrm{d}\dot{z}}{\mathrm{d}t} = 0$$
$$m\dot{z}\left(-g + \ddot{z}\right) = 0$$

La solution $\dot{z} = 0$ $\forall t$ est sans intérêt. Il reste $-g + \ddot{z} = 0$.

$$\boxed{\ddot{z} = g}$$

En l'absence de frottement, tous les corps ont la même accélération g et donc, à conditions initiales égales, chutent de la même manière (voir vidéo historique de la chute d'un marteau et d'une plume sur la lune et celle illustrant la visite de Brian Cox dans la chambre à vide de la NASA).

`https://www.youtube.com/watch?v=vb2GDgTGa3g`
`https://www.youtube.com/watch?v=E43-CfukEgs`

Calcul du temps de chute :

En intégrant par rapport au temps :

$v = \dot{z} = gt + cte = gt$ car à $t = 0$ $v(0) = 0$.

$z = \frac{1}{2}gt^2 + cte = \frac{1}{2}gt^2$ car à $t = 0$ $z(0) = 0$.

On peut alors calculer le temps t_h mis pour chuter d'une hauteur h. On a :

$$h = \frac{1}{2}gt_h^2$$

$$\boxed{t_h = \sqrt{\frac{2h}{g}}}$$

On peut retrouver la vitesse en B : pour $t = t_h$, $v_B = gt_h = g\sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{2gh}$.

Remarque : Si on souhaite seulement calculer la vitesse en B, il est plus rapide d'écrire directement la conservation de l'énergie mécanique : $E_m(A) = E_m(B)$.

IV.2. Mouvement non conservatif : chute avec frottements visqueux

a) Mise en équation

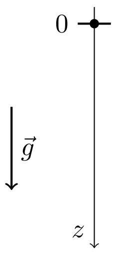
On tient compte désormais d'une force de frottement. Son expression peut varier suivant la nature de l'écoulement fluide autour de l'objet. On peut avoir des frottements de type visqueux (force proportionnelle à la vitesse v, puissance proportionnelle à v^2), de type quadratique (force proportionnelle au carré de la vitesse v^2, puissance proportionnelle à v^3) ou des expressions plus complexes. Les frottements visqueux s'appliquent en général aux mouvements de "vitesse peu élevée" dans des liquides et les frottements quadratiques aux mouvements de "vitesse élevée" dans des gaz.

On se place ici dans le cas où les frottements sont de type visqueux (par exemple on fait chuter une bille dans une éprouvette contenant de l'huile). On admet que sa puissance $\mathcal{P}_f$ est de la forme

$$\mathcal{P}_f = -\alpha v^2$$

$$\text{Unités SI : } [\alpha] = \frac{[\mathcal{P}_f]}{[v^2]} = \frac{\mathrm{kg.m^2.s^{-3}}}{\mathrm{m^2.s^{-2}}} = \mathrm{kg.s^{-1}}$$

On oriente l'axe des z suivant la verticale descendante. À $t = 0$, on lâche une masse m sans vitesse initiale depuis le point O.



Système : masse m

Référentiel : terrestre galiléen

Bilan des forces : poids (force conservative)

force de frottement visqueux (non conservative)

D'après le le TPM : $\dfrac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}_{nc} = -\alpha v^2$

avec $E_m = \frac{1}{2}mv^2 - mgz$ (même expression qu'au III.1).

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}mv^2 - mgz\right) = -\alpha v^2$$

$$\frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} - mg\dot{z} = -\alpha v^2$$

Or $\dot{z} = v$

$$mv\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} - g\right) = -\alpha v^2$$

On se place à $v \neq 0$ (la solution $v = 0\ \forall t$ est sans intérêt). On obtient, en simplifiant par v et en divisant par m :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{\alpha}{m}v = g}$$

Comme cette équation relie $v(t)$ et sa dérivée première $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$, on dit que c'est une équation différentielle d'ordre 1.

b) Résolution

On cherche à résoudre l'équation différentielle

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{\alpha}{m}v = g} \qquad (E)$$

c'est-à-dire trouver la fonction $v(t)$ telle que

$$\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{\alpha}{m}v(t) = g$$

On peut tester différentes fonctions pour essayer de deviner des solutions possibles. Par exemple :

- Est-ce que $v(t) = g$ peut être solution de (E) ?

  $v(t) = g$ ne peux absolument pas être solution car v est homogène à une vitesse et g à une accélération !

  Le calcul peut le confirmer :

  $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0$ car $g = cte$. On a donc

  $\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{\alpha}{m}v(t) = 0 + \frac{\alpha}{m}g \neq g$

  La fonction proposée n'est pas solution de (E).

- Comment transformer l'expression testée précédemment pour trouver une solution ?

  $v(t) = \frac{m}{\alpha}g = cte$ est homogène à une vitesse et est solution. On peut le vérifier :

  $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0$ car $\frac{m}{\alpha}g = cte$

  $\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{\alpha}{m}v(t) = 0 + \frac{\alpha}{m}\frac{m}{\alpha}g = g$

  La fonction $v(t) = \frac{m}{\alpha}g$ est solution de (E).

- Est-ce que $v(t) = \lambda e^{-\frac{\alpha}{m}t}$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$ est solution de (E) ?

  $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\lambda\frac{\alpha}{m}e^{-\frac{\alpha}{m}t}$. D'où en reportant dans (E) :

  $\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{\alpha}{m}v(t) = -\lambda\frac{\alpha}{m}e^{-\frac{\alpha}{m}t} + \frac{\alpha}{m}\lambda e^{-\frac{\alpha}{m}t} = 0 \neq g$

  La fonction $v(t) = \lambda e^{-\frac{\alpha}{m}t}$ n'est pas solution de (E).

On associe à (E), l'équation $(E0)$ dite "sans second membre" :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{\alpha}{m}v = 0} \qquad (E0)$$

- Est-ce que $v(t) = \lambda e^{-\frac{\alpha}{m}t}$ est solution de $(E0)$?

  D'après le calcul précédent on voit que $v(t) = \lambda e^{-\frac{\alpha}{m}t}$ est solution de $(E0)$.

- D'après vous quelle pourrait-être la forme générale des solutions de (E) ?

$$v(t) = \frac{mg}{\alpha} + \lambda e^{-\frac{\alpha}{m}t} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Méthode de résolution (méthode à connaître absolument !) :

On cherche les solutions de l'équation :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{\alpha}{m}v = g} \qquad (E)$$

L'équation (E) est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficient constant.

On peut lui associer l'équation homogène $(E0)$ correspondant à l'équation sans second membre :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{\alpha}{m}v = 0} \qquad (E0)$$

• La solution de (E) existe et est unique si on connaît la condition initiale $v(0) = v_0$ (ici $v(0) = 0$).

• La solution de (E) est la superposition :

- de la solution de l'équation homogène $(E0)$:

  $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{\alpha}{m}v = 0.$

  $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{\alpha}{m}v$

  $v_h(t) = \lambda e^{-\frac{\alpha}{m}t} \qquad \lambda \in \mathbb{R}$

- d'une solution particulière de (E) dont la nature dépend du membre de droite. Lorsque celui-ci est constant, la solution particulière est une constante $v_p(t) = K = cte$. En l'injectant dans (E) on obtient :

  $0 + \frac{\alpha}{m}K = g$

  $v_p(t) = K = \frac{mg}{\alpha}$

La solution générale de (E) est de la forme :

$$v(t) = v_h(t) + v_p(t) = \lambda e^{-\frac{\alpha}{m}t} + \frac{mg}{\alpha}$$

Attention : on exprime toujours la solution générale de (E) AVANT d'utiliser les conditions initiales.

La constante d'intégration λ se détermine à l'aide de la condition initiale :

À $t = 0$: $v(0) = 0 = \lambda + \frac{mg}{\alpha}$

$\lambda = -\frac{mg}{\alpha}$

$$\boxed{v(t) = \frac{mg}{\alpha}\left(1 - e^{-\frac{\alpha}{m}t}\right)}$$

c) Tracé de la courbe $v(t)$

$\lim\limits_{t\to\infty} e^{-\frac{\alpha}{m}t} = 0$ d'où $\lim\limits_{t\to\infty} v(t) = \frac{mg}{\alpha}$. On note $v_\ell = \frac{mg}{\alpha}$ la vitesse limite atteinte.

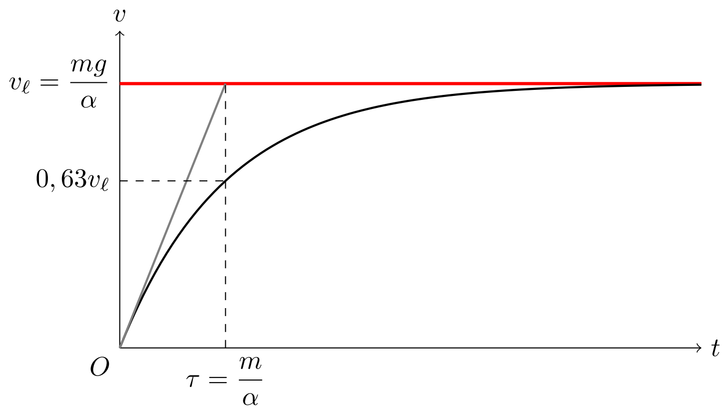
Si on pose $\tau = \frac{m}{\alpha}$, on peut écrire $\boxed{v(t) = v_\ell\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)}$

On calcule la dérivée : $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \dfrac{v_\ell}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}$

La pente de la tangente à l'origine vaut donc $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(0) = \frac{v_\ell}{\tau}$. Elle a pour équation $y = \frac{v_\ell}{\tau}t$. Elle coupe l'asymptote pour une valeur de t telle que $v_\ell \frac{t}{\tau} = v_\ell$ soit $t = \tau$.

$$\begin{cases} v(\tau) = v_\ell(1 - e^{-1}) = 0,63\, v_l \\ v(2\tau) = v_\ell(1 - e^{-2}) = 0,86\, v_l \\ v(3\tau) = v_\ell(1 - e^{-3}) = 0,95\, v_l \end{cases}$$

Pour $t \geqslant 3\tau$ la vitesse limite est atteinte avec un écart relatif inférieur à 5%.



d) Interprétation

On peut déterminer directement la vitesse limite sans avoir à résoudre l'équation différentielle.

Au moment du lâcher, la vitesse est nulle, la force de frottement également, la masse commence donc à prendre de la vitesse. Puis, plus la vitesse augmente, plus la force de frottement augmente et il est de plus en plus difficile de gagner de la vitesse.

Lorsque la vitesse limite est atteinte la force de frottement compense exactement le poids.

D'un point de vue énergétique, lorsque la vitesse limite est atteinte, l'énergie cinétique est constante et l'énergie potentielle perdue au cours de la chute est intégralement transformée en énergie thermique (ou "chaleur") à cause des frottements.

Pour $v = v_\ell$, $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0$, $\dfrac{\alpha}{m}v_\ell = g$.

On retrouve ainsi directement $v_\ell = \dfrac{mg}{\alpha}$.

e) Forme canonique de l'équation

L'équation du mouvement :

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{\alpha}{m} v = g$$

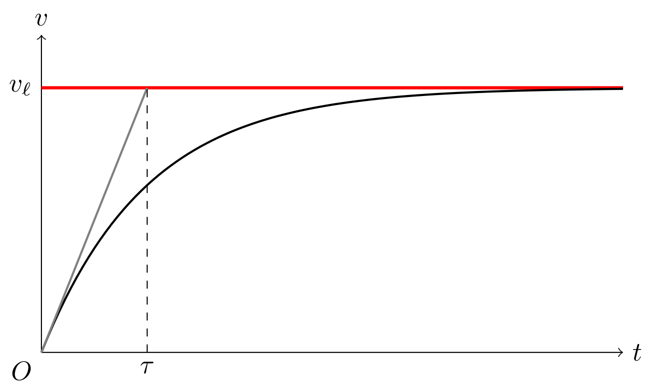
peut s'écrire sous la **forme canonique** :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau} v = \frac{1}{\tau} v_\ell}$$

avec, par identification :

$\dfrac{1}{\tau} = \dfrac{\alpha}{m} \longrightarrow \tau = \dfrac{m}{\alpha}$ temps caractéristique.

$\dfrac{1}{\tau} v_\ell = g \longrightarrow v_\ell = g\tau = \dfrac{mg}{\alpha}$ valeur limite.



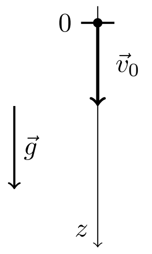
IV.3. Exemple de frottements quadratiques

On suppose que la vitesse initiale n'est pas nulle et qu'elle est suffisamment élevée pour que les frottements soient quadratiques. La force de frottement est proportionnelle à v^2 et sa puissance $\mathcal{P}_f$ est proportionnelle à v^3. On a :

$$\mathcal{P}_f = -\beta v^3$$

$$\text{Dimensionnellement : } [\beta] = \frac{[\mathcal{P}_f]}{[v^3]} = \frac{\text{kg.m}^2.\text{s}^{-3}}{\text{m}^3.\text{s}^{-3}} = \text{kg.m}^{-1}$$

On peut établir l'équation du mouvement



Système : masse m

Référentiel : terrestre galiléen

Bilan des forces : poids (force conservative)
force de frottement quadratique (non conservative)

D'après le le TPM : $\dfrac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}_{nc} = -\beta v^3$

avec $E_m = \frac{1}{2}mv^2 - mgz$ (même expression qu'au III.1).

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}mv^2 - mgz\right) = -\beta v^3$$

$$\frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} - mg\dot{z} = -\beta v^3$$

Or $\dot{z} = v$

$$mv\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} - g\right) = -\beta v^3$$

On obtient, en simplifiant par v (solution nulle sans intérêt) :

$$m\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} - g\right) = -\beta v^2$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{\beta}{m}v^2 = g}$$

L'équation obtenue n'est plus linéaire à cause du terme en v^2.

Les équations non linéaires ne sont pas toujours solubles analytiquement. Dans ce cas il faut utiliser des méthodes numériques de résolution. L'équation obtenue ici fait cependant partie des équations solubles analytiquement. On peut, sans résoudre cette équation, déterminer des caractéristiques du mouvement.

<u>Calcul de la vitesse limite v_ℓ :</u>

Lorsque la vitesse limite est atteinte, le poids et la force de frottement se compensent.
Pour $v = v_\ell$, $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0$, $\dfrac{\beta}{m}v_\ell^2 = g$.

$$v_\ell = \sqrt{\frac{mg}{\beta}}$$

<u>Estimation du temps caractéristique τ :</u>

On peut, par analyse dimensionnelle, estimer le temps caractéristique τ. On considérera qu'au bout de quelques τ la vitesse limite est atteinte.

$[\beta] =$ kg.m^{-1} ; $[g] =$ m.s^{-2} ; $[m] =$ kg.

Il apparaît que $\sqrt{\dfrac{m}{\beta g}}$ est homogène à un temps. On peut poser $\tau = \sqrt{\dfrac{m}{\beta g}}$.

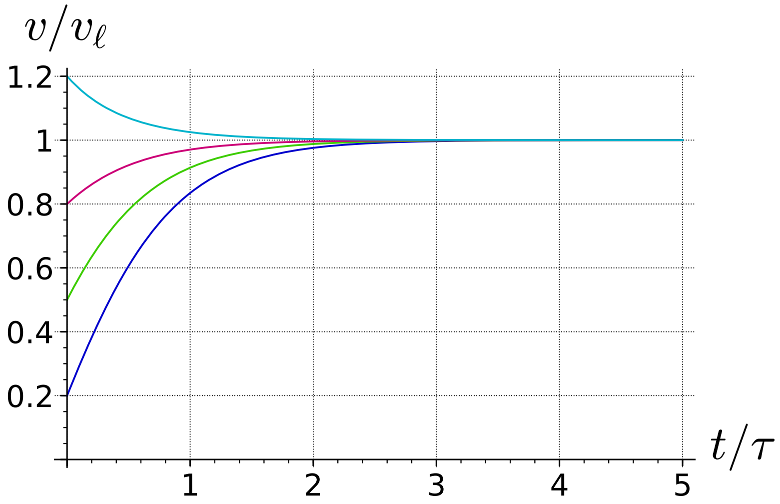
Remarque : on peut aussi poser l'équation aux dimensions :

$$\tau = \beta^a m^b g^c$$

$$s = \ \mathrm{kg^a.m^{-a}.kg^b.\ m^c.s^{-2c}} = \ \mathrm{kg^{a+b}.m^{c-a}.s^{-2c}}$$

qui donne $a+b=0$; $c-a=0$; $-2c=1$; On retrouve $a=c=-\frac{1}{2}$ et $b=\frac{1}{2}$.

On a tracé sur la figure ci-dessous v/v_ℓ en fonction de t/τ pour différentes vitesses initiales (on ne détaillera pas ici la résolution de l'équation). On vérifie bien que pour $t/\tau > 3$ (soit $t > 3\tau$) la vitesse limite est atteinte ($v/v_\ell = 1$).

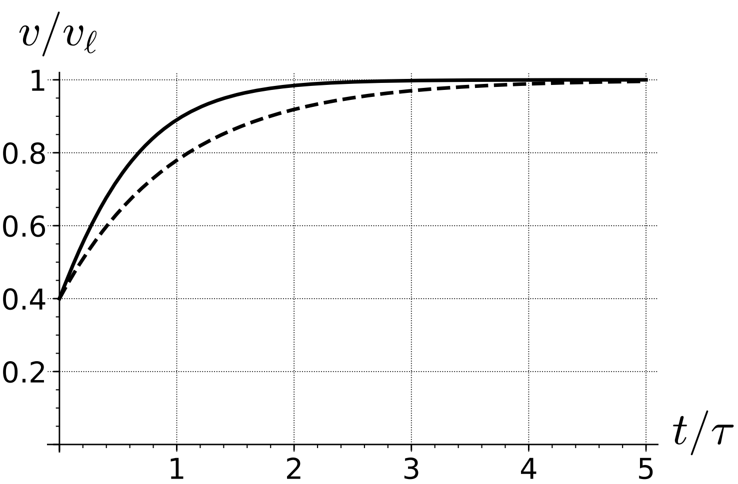


IV.4. Comparaison des deux modèles

Dans le cadre du modèle avec frottements visqueux la vitesse limite $v_\ell = \frac{mg}{\alpha}$ est atteinte au bout de quelques τ (avec $\tau = \frac{m}{\alpha} = \frac{mg}{\alpha g} = \frac{v_\ell}{g}$).

Dans le cadre du modèle avec frottements quadratiques la vitesse limite $v_\ell = \sqrt{\frac{mg}{\beta}}$ est atteinte au bout de quelques τ (avec $\tau = \sqrt{\frac{m}{\beta g}} = \sqrt{\frac{mg}{\beta g^2}} = \frac{v_\ell}{g}$).

On a tracé ci-dessous sur un même diagramme la solution qu'on obtiendrait avec un frottement visqueux (pointillés) et celle correspondant aux frottements quadratiques (en traits pleins).



Ainsi, on constate qu'à vitesse limite et condition initiale égales, la vitesse augmente un peu moins vite dans le cas de frottements visqueux que dans le cas de frottements quadratiques.

Entraînez-vous :

Cherchez l'expression de la solution de l'équation (E)

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{\alpha}{m}v = g$$

mise sous la forme canonique (avec $\tau = \frac{m}{\alpha}$ et $v_\ell = g\tau = \frac{mg}{\alpha}$).

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}v = \frac{1}{\tau}v_\ell$$

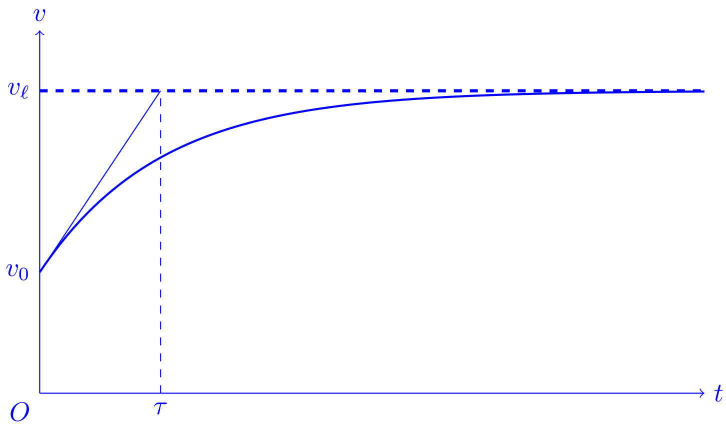
avec comme condition initiale $v(0) = v_0 \neq 0$.

Tracer la courbe de la solution en supposant $0 < v_0 < v_\ell$.

Réponse :

La solution est de la forme :

$$v(t) = (v_0 - v_\ell)e^{-t/\tau} + v_\ell$$



3. Énergie mécanique	
Énergie mécanique	Distinguer une énergie cinétique d'une énergie potentielle.
Conservation de l'énergie	Identifier les cas de conservation de l'énergie mécanique. Déduire d'un graphe d'énergie potentielle ou d'une expression d'une énergie mécanique une vitesse ou une position en des points particuliers. Déduire d'un graphe d'énergie potentielle le comportement borné ou non de la trajectoire.
Non conservation de l'énergie mécanique Modèle d'ordre 1	Distinguer force conservative et force non conservative. Reconnaître les cas de conservation de l'énergie mécanique. Énoncer le théorème liant l'énergie mécanique à la puissance des forces non conservatives. Étudier un système modélisé par une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants ; interprétation qualitative du temps caractéristique. Exploiter numériquement une interaction dissipative amenant à une équation différentielle linéaire ou non linéaire.