M2 - Énergie potentielle

Dans le chapitre précédent on a abordé la notion d'énergie cinétique que possède un système en mouvement dans un référentiel donné. On s'intéresse ici à un autre aspect de l'énergie.

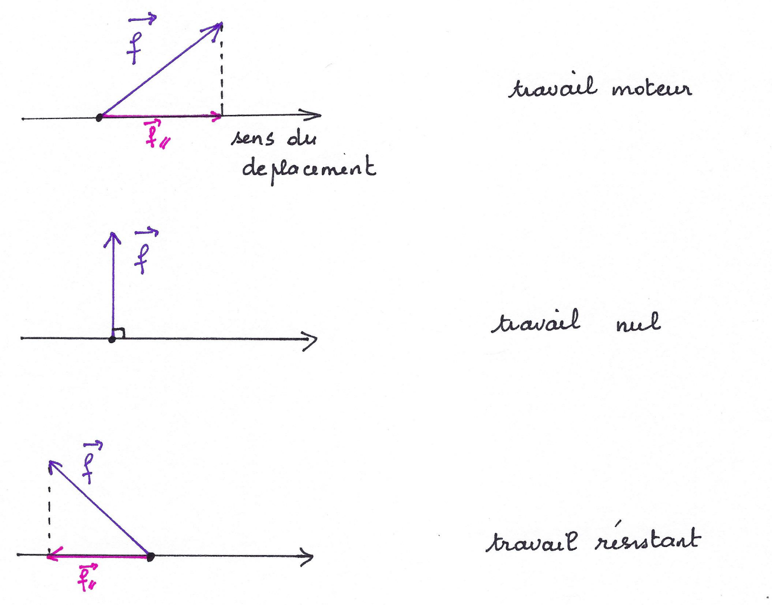
I. Transfert d'énergie

I.1. Notion de force

Une **force** est une action mécanique susceptible de modifier la direction ou la norme de la vitesse d'un point matériel. On la représente par un vecteur.

Pour qu'une force travaille il faut que son point d'application se déplace.

Si la force a une direction perpendiculaire au mouvement son travail est nul.



I.2. Interactions fondamentales

Toutes les forces (le poids, la force de Coulomb, les forces de frottements, la réaction d'un support, etc...) découlent d'une des quatre interactions fondamentales suivantes [1] :

- Interaction gravitationnelle
- Interaction électromagnétique
- Interaction faible
- Interaction forte

Type d'interaction	Caractéristiques
Gravitationnelle	Masses en interaction
Électromagnétique	Charges en interaction
Faible	À l'échelle des particules élémentaires
Forte	Protons et neutrons au sein du noyau

I.3. Quelques observations

Placer un livre en hauteur sur une étagère demande un effort car il faut s'opposer au poids du livre. Si jamais ce livre tombe, il va acquérir dans sa chute une certaine énergie cinétique. L'effort fourni pour monter l'objet

1. voir polycopié : Interactions fondamentales

a permis un transfert d'énergie (sous forme "potentielle") vers cet objet, énergie qui peut être restituée par la suite, par exemple sous forme d'énergie cinétique.

Cette manière de stocker de l'énergie est mise à profit dans les barrages : lorsque la production d'électricité dépasse la demande on actionne des pompes qui permettent de faire remonter l'eau dans les lacs de retenue. On stocke ainsi de l'énergie sous forme "potentielle". Lors du prochain pic de consommation on pourra récupérer cette énergie.

De même les anciennes horloges fonctionnaient à l'aide de poids qu'il fallait remonter régulièrement.
Le dispositif "Gravity Light" utilise ce principe de fonctionnement :
https://www.youtube.com/watch?v=QX32yQgybaw

Les ressorts ou les dispositifs élastiques permettent également de stocker de l'énergie. Exemples : tir à l'arc ou à l'arbalète, diable sortant d'une boîte, tapette à souris...
On fournit un effort pour comprimer un ressort. Celui-ci pourra restituer l'énergie reçue lorsqu'il se détendra.

Si on tire un carton qui frotte sur le sol, on peut marcher longtemps... et ne rien récupérer ! Toute l'énergie fournie au cours du déplacement n'a pas été stockée sous forme "potentielle" : elle a été essentiellement dissipée sous forme de chaleur au niveau des zones de frottements.

I.4. Forces conservatives - Forces non conservatives

Nous emploierons dans quelque temps une définition rigoureuse d'une force conservative, reliée au travail de cette force :

Une force conservative est une force dont le travail est indépendant du chemin suivi.

Pour l'instant, on se contentera d'une définition plus qualitative :

> Une **force conservative** permet à un système de stocker de l'énergie (lorsque cette force s'est opposée au déplacement de l'objet), cette énergie pouvant ensuite être récupérée.

- Toute force conservative est associée à une **énergie potentielle**.
- Une énergie potentielle est définie à une constante additive près : seules les variations d'énergie potentielle ont un sens physique.

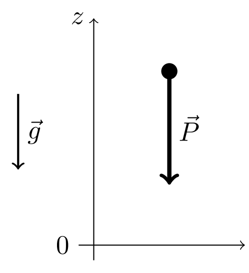
> Le poids et la force élastique sont des forces conservatives.
> Les forces de frottement sont des forces non-conservatives.

II. Énergie potentielle

II.1. Énergie potentielle de pesanteur

a) Interaction gravitationnelle

Le poids qui s'exerce sur une masse m placée à la surface de la Terre est lié à la force gravitationnelle qu'exerce la Terre sur cette masse.



$\vec{P} = m\vec{g}$
avec : $g = 9,8$ m.s^{-2}
m masse grave (en kg)

✎ Relier g champ gravitationnel à la surface de la Terre, à G la constante de gravitation, M_T ($M_T = 5,97.10^{24}$ kg) la masse de la Terre et R_T le rayon de la Terre ($R_T = 6,38.10^3$ km). On admet que la Terre est assimilable à une masse ponctuelle M_T placée en son centre.

$$mg = G\frac{mM_T}{R_T^2} \quad \text{d'où} \quad g = G\frac{M_T}{R_T^2}$$

Remarques : g peut être considéré uniforme si on se place à une échelle verticale très inférieure au rayon terrestre. La valeur de g à trois chiffres significatifs tient compte, outre l'attraction gravitationnelle de la Terre, des effets dus à la rotation de la Terre et à sa non sphéricité. Pour ces raisons g varie de $9,78$ m.s^{-2} sur l'équateur à $9,83$ m.s^{-2} aux pôles.

b) Expression de l'énergie potentielle de pesanteur

On se place dans le champ de pesanteur terrestre supposé **uniforme** et d'intensité g.
Plus l'altitude augmente plus l'énergie potentielle doit être importante. L'**énergie potentielle de pesanteur** E_{pp} a pour expression :
• Si l'axe Oz est orienté suivant la verticale ascendante :

$$\boxed{E_{pp}(z) = mgz + cte \quad \text{avec } z \uparrow}$$

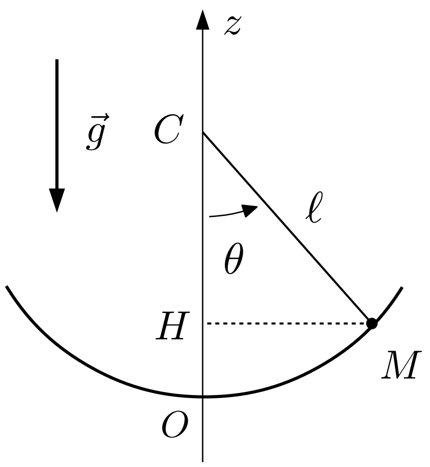
Si on choisit $E_{pp} = 0$ en $z = 0$ alors $E_{pp}(z) = mgz$.

Attention :
• Si l'axe Oz est orienté vers le bas $E_{pp}(z) = -mgz + cte$.

$$\boxed{E_{pp}(z) = -mgz + cte \quad \text{avec } z \downarrow}$$

c) Exemples

Déterminer, à une constante additive près, l'énergie potentielle de pesanteur $E_{pp}(\theta)$ de la masse m :



On oriente l'axe Oz suivant la verticale ascendante et on choisit l'origine de l'axe en O.

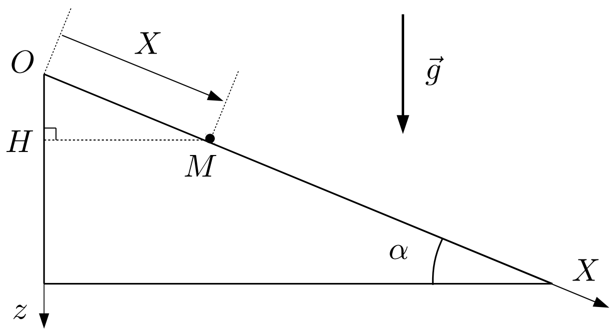
$E_{pp} = mgz_M + cte = mgOH + cte = mg(OC - CH) + cte$

$E_{pp} = mg(\ell - \ell\cos\theta) + cte$

$$\boxed{E_{pp} = mg(\ell - \ell\cos\theta) + cte = mg\ell(1 - \cos\theta) + cte = -mg\ell\cos\theta + Cte}$$

avec $Cte = cte + mg\ell$.

Déterminer, à une constante additive près, l'énergie potentielle de pesanteur $E_{pp}(X)$ de la masse m :



On oriente l'axe Oz suivant la verticale descendante et on choisit l'origine de l'axe en O.

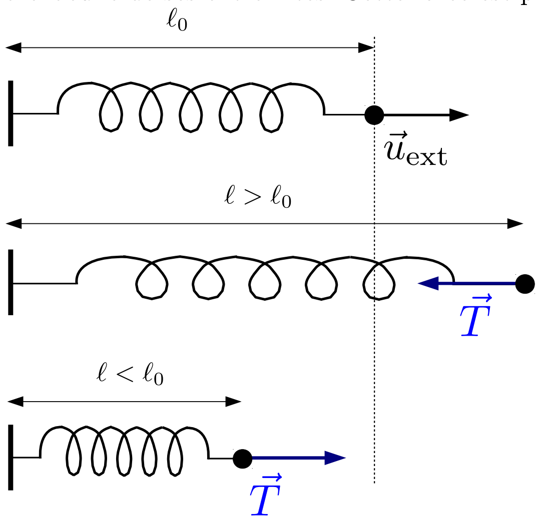
$E_{pp} = -mgz_M + cte = -mgX \sin\alpha + cte$

$$\boxed{E_{pp} = -mgX \sin\alpha + cte}$$

II.2. Énergie potentielle élastique

a) Caractéristiques d'un ressort

Un ressort est caractérisé par sa **constante de raideur** k (homogène à une force par unité de longueur) et sa longueur à vide ℓ_0.
Lorsqu'on étire un ressort il tend à revenir vers sa longueur à vide en exerçant une force (dite force de rappel) à chacune de ses extrémités. Cette force est proportionnelle à l'allongement du ressort.



Soit $\vec{T}$ la force de rappel qu'exerce l'extrémité du ressort sur la masse m. On a

$$\vec{T} = -k(\ell - \ell_0)\vec{u}_{\text{ext}}$$

avec $\vec{u}_{\text{ext}}$ le vecteur unitaire sortant du ressort à l'extrémité où on calcule la force.

$$[k] = \text{N.m}^{-1}$$

La constante de raideur est homogène à une force par unité de longueur.

b) Expression de l'énergie potentielle élastique

Soit E_{pe} l'**énergie potentielle élastique** associée à un ressort de constante de raideur k et de longueur à vide ℓ_0.

$$E_{pe} = \frac{1}{2}\, k\, (\ell - \ell_0)^2 + cte$$

En général, on choisit $E_{pe} = 0$ pour $\ell = \ell_0$. On a alors $cte = 0$.

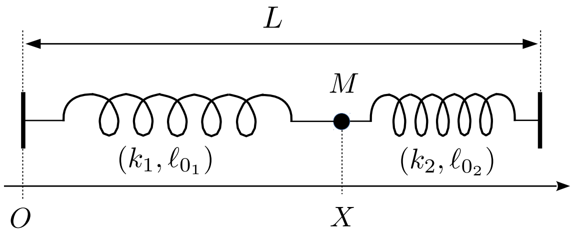
$$E_{pe} = \frac{1}{2}\, k\, (\ell - \ell_0)^2 \quad \text{avec } E_{pe} = 0 \text{ pour } \ell = \ell_0$$

On vérifie que plus le ressort est comprimé (ou étiré), plus son énergie potentielle augmente.

Il faudra toujours prendre le temps d'exprimer soigneusement la longueur ℓ du ressort en fonction de la variable d'espace utilisée dans le problème.

c) Exemple

Déterminer, à une constante additive près, l'énergie potentielle élastique du point matériel M accroché à deux ressorts de caractéristiques respectives (k_1, ℓ_{0_1}), (k_2, ℓ_{0_2})



On exprime d'abord les longueurs ℓ_1 et ℓ_2 de chaque ressort en fonction des paramètres du problème :

$\ell_1 = X$

$\ell_2 = (L - X)$

On additionne ensuite les énergies potentielles associées à chaque ressort :

$E_p = \frac{1}{2}k_1(\ell_1 - \ell_{0_1})^2 + \frac{1}{2}k_2(\ell_2 - \ell_{0_2})^2 + cte$

$E_p = \frac{1}{2}k_1(X - \ell_{0_1})^2 + \frac{1}{2}k_2(L - X - \ell_{0_2})^2 + cte$

II.3. Propriétés des énergies potentielles

On remarque dans tous les exemples précédents que l'énergie potentielle ne dépend que de la position du point matériel et pas de sa vitesse.

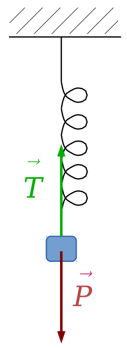
Si plusieurs forces conservatives s'exercent sur un même point matériel alors l'énergie potentielle totale est la somme des énergies potentielles liées à chacune des forces.

III. Équilibre en référentiel galiléen

III.1. Condition d'équilibre

Si un point matériel est à l'équilibre dans un référentiel galiléen alors la somme des forces qui s'exercent sur lui est nulle.

$$\sum_i \vec{f_i} = \vec{0}$$



Exemple : masse accrochée à un ressort

À l'équilibre la tension du ressort compense exactement le poids.

$$\vec{T} + \vec{P} = \vec{0}$$

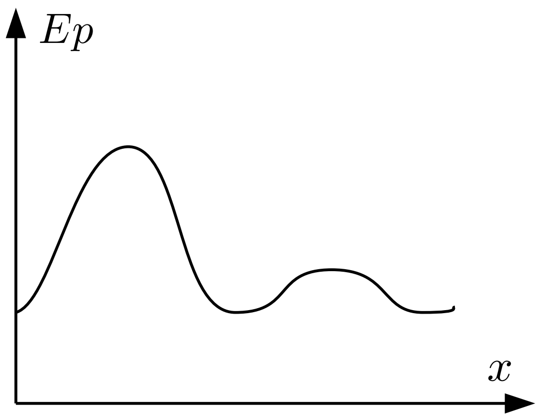
Une approche énergétique permet de déterminer la longueur du ressort à l'équilibre en manipulant uniquement des grandeurs scalaires.

III.2. Quelques constatations

On ne considère pour l'instant que des systèmes à 1 degré de liberté soumis à des forces conservatives de pesanteur ou élastique.

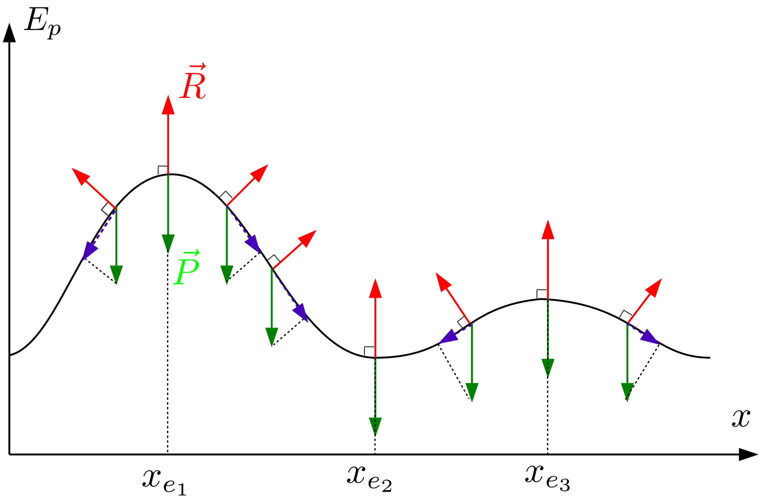
Pour des raisons de simplicité on raisonne sur l'énergie potentielle de pesanteur. Considérons l'exemple des montagnes russes.

Le profil d'énergie potentielle correspond au profil du rail.



Au cours du mouvement, la masse m est soumise à son poids et à la réaction du rail. En l'absence de frottements, cette réaction est normale au rail. Le travail de cette force est donc nul.

Sur la figure ci-dessous on a représenté en différents points, le poids et la réaction du rail (seule sa direction nous importe ici).



Il existe trois positions d'équilibre (x_{e_1}, x_{e_2} et x_{e_3}) pour lesquelles la condition $\vec{R}+\vec{P}=\vec{0}$ se réalise.
Ces points correspondent à des extrema de la courbe de $E_p(x)$. En ces points, la courbe admet une tangente horizontale.
Si on dépose sans vitesse la masse m dans l'une de ces positions, elle devrait y demeurer, en l'absence de perturbation.

Retenir :

Les positions d'équilibre correspondent à des extrema de l'énergie potentielle, pour lesquels $\dfrac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x}=0$.

Supposons qu'une perturbation écarte légèrement la masse m de sa position d'équilibre. La projection du poids sur la direction du rail permet d'analyser la stabilité le mouvement ultérieur.

Que se passe-t-il si on écarte légèrement la masse de la position d'équilibre x_{e_2} ?

La projection du poids sur la direction du rail (flèche bleue) tend à ramener la masse vers la position $x=x_{e_2}$.

Que se passe-t-il si on écarte légèrement la masse de la position d'équilibre x_{e_1} ou x_{e_3} ?

La projection du poids sur la direction du rail (flèche bleue) tend à éloigner davantage la masse de sa position $x=x_{e_1}$ (ou $x=x_{e_3}$) .

Identifier les positions d'équilibre stable(s) et instable(s).

- $x=x_{e_2}$ correspond à une position d'équilibre stable
- $x=x_{e_1}$ et $x=x_{e_3}$ correspondent à des positions d'équilibre instables

Retenir :

Les positions d'équilibre **stables** correspondent à un **minimum** de l'énergie potentielle.
Les positions d'équilibre **instables** correspondent à un **maximum** de l'énergie potentielle.

III.3. Expression mathématique de la condition d'équilibre

On considère un mouvement à 1 dimension, faisant intervenir des forces conservatives associées à l'énergie potentielle E_p.
On note x la variable d'espace (on pourrait raisonner de même avec z ou θ).

Condition d'équilibre :

$$\boxed{\text{À l'équilibre : } \left(\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x}\right)_{x=x_e} = 0}$$

Stabilité de l'équilibre :

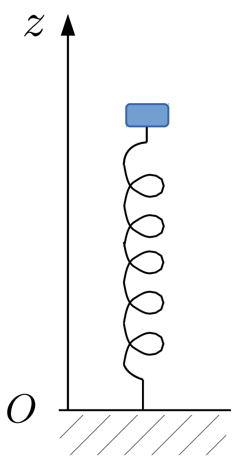
$$\text{Si } \left(\frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}x^2}\right)_{x=x_e} > 0 \;\Rightarrow\; E_p \text{ est minimale à l'équilibre } \;\Rightarrow\; \text{l'équilibre est stable}$$
$$\text{Si } \left(\frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}x^2}\right)_{x=x_e} < 0 \;\Rightarrow\; E_p \text{ est maximale à l'équilibre } \;\Rightarrow\; \text{l'équilibre est instable}$$

Remarque : si $\left(\frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}x^2}\right)_{x=x_e} = 0$ il faut revenir à l'étude graphique et vérifier si la courbe admet un minimum ou un maximum pour pouvoir conclure.

III.4. Exemples

Déterminer pour chacun des exemple suivants, la position d'équilibre et sa stabilité.

• masse sur un ressort (amortisseur de voiture)



Système : masse m
Référentiel : terrestre galiléen
Bilan des forces :
– poids : associé à l'énergie potentielle E_{pp}
– force élastique : associée à l'énergie potentielle E_{pe}

$E_{pp} = mgz + cte = mgz$ si on choisit $E_{pp}(0) = 0$.

$E_{pe} = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2 = \frac{1}{2}k(z - \ell_0)^2$ si on choisit $E_{pe} = 0$ pour $z = \ell_0$.

$E_p = E_{pp} + E_{pe} = mgz + \frac{1}{2}k(z - \ell_0)^2$

La variable d'espace choisie est z.

À l'équilibre $z = z_e$ tel que $\left(\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}z}\right)_{z=z_e} = 0$.

$\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}z} = mg + \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}k(z - \ell_0)$

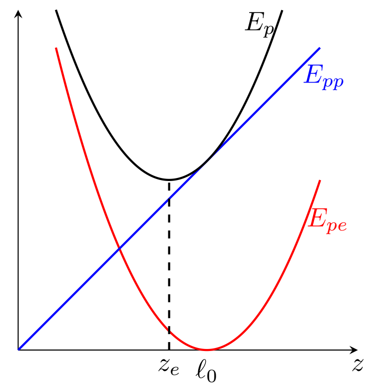
z_e vérifie l'équation : $mg + k(z_e - \ell_0) = 0$

$$\boxed{z_e = \ell_0 - \frac{mg}{k}}$$

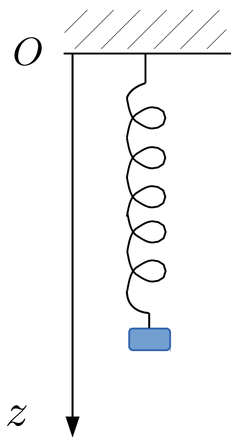
On vérifie que $z_e < \ell_0$: le ressort est bien comprimé.

On vérifie graphiquement que la position d'équilibre z_e est inférieure à ℓ_0.
On a tracé sur le diagramme ci-contre, l'énergie potentielle de pesanteur, l'énergie potentielle élastique E_{pe} et E_p, l'énergie potentielle totale.

z_e correspond à la position du minimum de E_p.



• masse suspendue à un ressort



Système : masse m

Référentiel terrestre galiléen

Bilan des forces :
– poids : associé à l'énergie potentielle E_{pp}
– force élastique : associée à l'énergie potentielle E_{pe}

$E_{pp} = -mgz + cte = -mgz$ si on choisit $E_{pp}(0) = 0$.

$E_{pe} = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2 = \frac{1}{2}k(z - \ell_0)^2$ si on choisit $E_{pe} = 0$ pour $z = \ell_0$.

$E_p = E_{pp} + E_{pe} = -mgz + \frac{1}{2}k(z - \ell_0)^2$

La variable d'espace choisie est z.

À l'équilibre $z = z_e$ tel que $\left(\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}z}\right)_{z=z_e} = 0$.

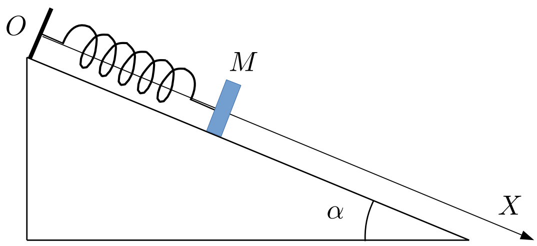
$\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}z} = -mg + \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}k(z - \ell_0)$

z_e vérifie la relation : $-mg + k(z_e - \ell_0) = 0$

$$\boxed{z_e = \ell_0 + \frac{mg}{k}}$$

On vérifie que $z_e > \ell_0$: le ressort est bien allongé.

• ressort sur un plan incliné



Système : masse m

Référentiel : terrestre galiléen

Bilan des forces :
– poids : associé à l'énergie potentielle E_{pp}
– force élastique : associée à l'énergie potentielle E_{pe}
– réaction normale du support : ne travaille pas (on néglige les frottements)

$E_{pp} = -mgX\sin\alpha + cte = -mgX\sin\alpha$
si on choisit $E_{pp}(0) = 0$ en O.

$E_{pe} = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2 = \frac{1}{2}k(X - \ell_0)^2$
si on choisit $E_{pe}(0) = 0$ pour $X = \ell_0$.

$E_p = E_{pp} + E_{pe} = -mgX\sin\alpha + \frac{1}{2}k(X - \ell_0)^2$

La variable d'espace choisie est X.
À l'équilibre $X = X_e$ tel que $\left(\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}X}\right)_{X=X_e} = 0$.

$\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}X} = -mg\sin\alpha + \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}k(X - \ell_0)$

X_e vérifie donc la relation : $-mg\sin\alpha + k(X_e - \ell_0) = 0$

$$\boxed{X_e = \ell_0 + \frac{mg\sin\alpha}{k}}$$

On vérifie que le ressort est bien allongé ($X_e > \ell_0$) et lorsque $\alpha = 0$ on retrouve $X_e = \ell_0$: à l'horizontale le ressort a sa longueur à vide.

Pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$ on retrouve $X_e = \ell_0 + \frac{mg}{k}$ en accord avec la valeur trouvée pour la position d'équilibre d'une masse suspendue à un ressort.

Notions et contenus	Capacités exigibles
2. Interactions conservatives	
Énergie potentielle fonction d'une seule variable spatiale	Citer les expressions de l'énergie potentielle de pesanteur associée à un champ uniforme et de l'énergie potentielle élastique associée à un ressort.
Équilibre en référentiel galiléen	Identifier sur le graphe de l'énergie potentielle les éventuelles positions d'équilibre stable et instable. Exploiter d'autres situations où l'expression de l'énergie potentielle est fournie.