M1 - Observation d'un mouvement

La *cinématique* est la description du mouvement d'un objet appelé "système". Elle fait intervenir les deux grandeurs physiques de base : longueur et temps.

La *dynamique* vise à prévoir le mouvement d'un système à partir des forces qui s'exercent sur lui. Elle nécessite une grandeur de base supplémentaire : la masse.

Les forces et les grandeurs cinématiques que sont la vitesse et l'accélération sont des grandeurs vectorielles. Cependant, dans le cadre du programme, les premiers chapitres de mécanique sont basés sur le concept d'énergie qui permet la manipulation de grandeurs scalaires. Nous développerons plus tard la description vectorielle du mouvement.

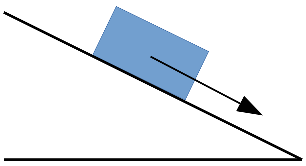
I. Système mécanique

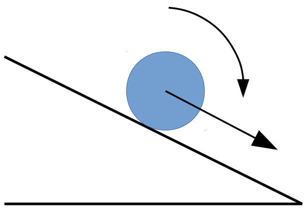
I.1. Quelques observations

Quelles similitudes et quelles différences peut-on relever en observant ces deux chronophotographies (*i.e.* des photographies d'un objet en mouvement prises à intervalles réguliers et superposées) ?

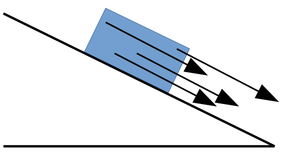
On distingue :
– système déformable
– système indéformable (=solide)
On ne s'intéressera par la suite qu'à des systèmes indéformables.

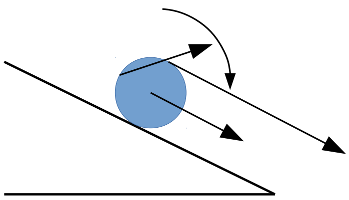
Analyser les deux types de mouvement représentés ci-dessous : l'un pourrait modéliser la descente d'une luge, l'autre le roulement d'une boule de neige sur un plan incliné .





À gauche, tous les points de l'objet ont la même vitesse (on redéfinira cette notion dans ce cours). Ils ont des trajectoires identiques parallèles entre elles : l'objet est en translation.
À droite, tous les points n'ont pas la même vitesse : le point de la sphère en contact avec le plan a une vitesse nulle (si on suppose que le contact s'effectue sans glissement). Le point situé au "sommet" de la sphère va plus vite que le centre.





I.2. Notion de point matériel

On peut se ramener à l'étude d'un point matériel lorsque

- l'objet est en translation : tous ses points ont la même vitesse.
- l'objet est de "faible extension spatiale" c'est-à-dire si l'on peut négliger son "mouvement propre".

On note en général M le point matériel et m sa masse.

Un point matériel possède trois degrés de liberté dans l'espace : sa position est définie par la donnée de 3 coordonnées.

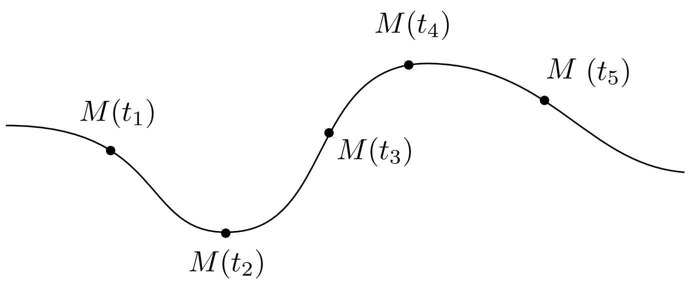
II. Référentiel

II.1. L'espace-temps classique

Pour suivre le mouvement d'un point matériel, il faut repérer ses différentes positions au cours du temps. Pour cela il faut
– un repère d'espace (de dimension 3) caractérisé par une origine et une base orthonormée.
– une horloge
L'ensemble constitue un **référentiel**.
Dans l'espace-temps classique, le temps s'écoule continûment et indépendamment du repère d'espace considéré (ce qui n'est plus le cas dans la théorie de la relativité). On peut alors choisir une horloge commune à tous les référentiels. Le choix d'un référentiel se réduit alors au choix du repère d'espace.

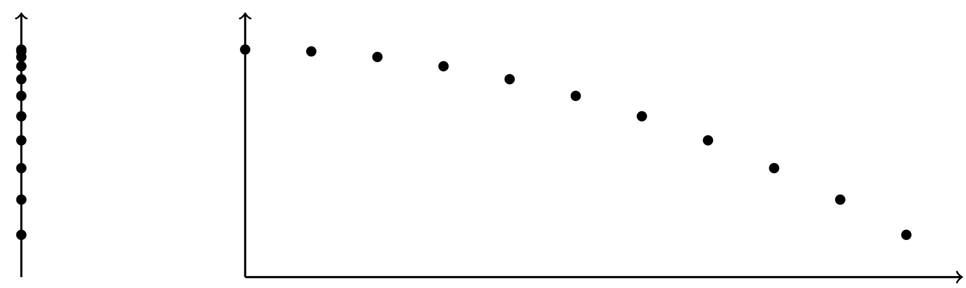
II.2. Relativité du mouvement

La **trajectoire** d'un point est la courbe représentant ses positions successives au cours du temps.



La trajectoire dépend du référentiel dans lequel on se place.

Exemple :
On considère un train roulant en ligne droite à vitesse constante. On lâche à l'intérieur d'un wagon une masse ponctuelle sans vitesse initiale (par rapport au référentiel lié au train). On obtient les trajectoires suivantes :



Dans le référentiel lié au train — Dans le référentiel lié au sol

Questions : supposons qu'il fasse nuit noire ou que toutes les vitres du train soient munies de rideaux occultants... Peut-on savoir, en faisant des expériences à l'intérieur du wagon, comme ce lâcher de balle, que le train est en mouvement par rapport au sol ?

À quel moment ressent-on qu'un train est en mouvement ?

II.3. Principe d'inertie

Ce principe privilégie une classe particulière de référentiels : les référentiels galiléens (ou référentiels inertiels).

a) Énoncé

Un point matériel qui n'est soumis à aucune action mécanique est dit **isolé**.

> Il existe une classe de référentiels, appelés **référentiels galiléens** (ou **référentiels inertiels**), par rapport auxquels un point matériel isolé est en mouvement rectiligne uniforme.

Un point matériel *isolé* est une abstraction puisqu'il suppose ce point infiniment éloigné de toute matière.
Concrètement, il arrive que les actions mécaniques s'exerçant sur un point matériel se compensent exactement (par exemple un palet glissant sur une patinoire : à tout moment le poids du palet est compensé par la réaction du sol). Un tel point constitue un *système pseudo-isolé* et possède un mouvement rectiligne uniforme dans un référentiel galiléen.

b) Choix d'un référentiel

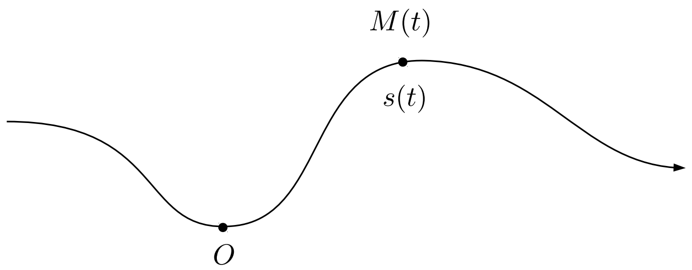
On se placera en général dans un **référentiel terrestre** qui a pour origine un point fixe de la Terre et possède des axes fixes par rapport à la Terre.
Pour la plupart des expériences courantes (s'effectuant sur une durée courte par rapport à la durée du jour), le référentiel terrestre pourra être considéré comme galiléen.

> Tout référentiel $\mathcal{R}'$ en translation rectiligne uniforme par rapport à un référentiel $\mathcal{R}$ galiléen est également galiléen.

Exemple : un référentiel lié à un train roulant en ligne droite à vitesse constante par rapport au référentiel terrestre est également galiléen.

II.4. Repérage d'un point sur une trajectoire

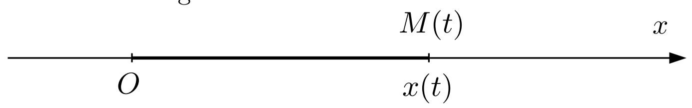
On peut repérer la position d'un point matériel sur sa trajectoire supposée connue par son *abscisse curviligne* $s(t)$ qui représente la longueur de l'arc orienté $\overset{\frown}{OM}(t)$.



$$s(t) = \overset{\frown}{OM}(t)$$

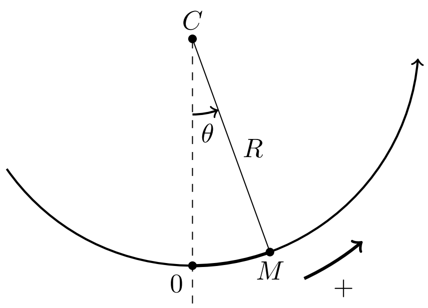
On se placera par la suite dans les deux cas particuliers :

— mouvement rectiligne



$$s(t) = \overline{OM}(t) = x(t)$$

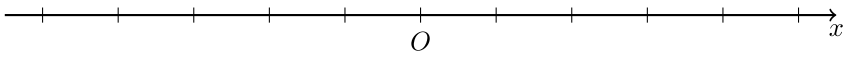
— mouvement circulaire

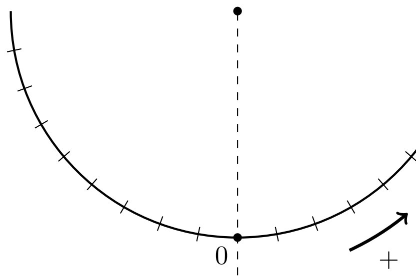


$$s(t) = \overset{\frown}{OM}(t) = R\,\theta(t) \quad \text{avec } \theta \text{ en radian}$$

Attention : x et θ sont des grandeurs algébriques : elles peuvent être positives ou négatives et leur signe dépend du sens d'orientation choisi.

L'axe ci-dessous est gradué en cm. Placer les points M_1 ($x_1 = 1$ cm) ; M_2 ($x_2 = -3$ cm).





L'écart entre deux graduations correspond à un angle de 10°.

Placer les points :
- M_1 ($\theta_1 = 10°$) ;
- M_2 ($\theta_2 = -30°$) ;
- M_3 ($\theta_3 = 420°$) ;
- M_4 ($\theta_4 = -\frac{\pi}{3}$ rad) ;

III. Vitesse

III.1. Vitesse moyenne

C'est la vitesse définie par

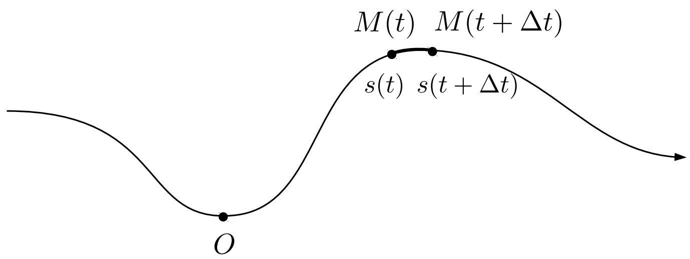
$$v_m = \frac{\text{distance parcourue}}{\text{temps de parcours}}$$

Dimensionnellement v_m est homogène à une longueur divisée par un temps. Son unité SI est le m.s^{-1}.

C'est donc une grandeur toujours positive qui correspond à l'usage courant du terme "vitesse". Cependant :

- elle ne permet pas de connaître le détail du mouvement : au cours du trajet l'indication donnée par le compteur de vitesse évolue. On démarre avec une vitesse nulle, puis la vitesse augmente, éventuellement se stabilise puis diminue lors de la décélération et s'annule à l'arrêt : on doit donc chercher à définir une *vitesse instantanée.*
- lorsqu'on lance une balle verticalement, elle monte en décélérant, atteint le sommet de sa trajectoire avec une vitesse nulle puis redescend. On doit pouvoir caractériser le *sens du mouvement.*

III.2. Vitesse scalaire



$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overset{\frown}{M(t)M(t+\Delta t)}}{\Delta t}$$

$$\boxed{v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \dot{s}}$$

Cas d'un mouvement rectiligne :

$$\boxed{v(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \dot{x}}$$

Cas d'un mouvement circulaire de rayon R :

$$\boxed{v(t) = \frac{\mathrm{d}(R\theta)}{\mathrm{d}t} = \underbrace{\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}}_{0}\theta + R\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = R\dot{\theta}}$$

Remarque : on note souvent $\omega = \dot{\theta}$, la vitesse angulaire du point M qui s'exprime en unité SI en rad.s^{-1}.

Un mouvement est uniforme lorsque $|v| = cte$.
– mouvement rectiligne uniforme : mouvement suivant une droite avec $\dot{x} = cte = v_0$. D'où, en intégrant :

$$x(t) = v_0 t + x(0)$$

– mouvement circulaire uniforme (dans ce cas $\omega = cte = \omega_0$) : $\dot{\theta}(t) = cte = \omega_0$

$$\theta(t) = \omega_0 t + \theta(0)$$

Exemples :

- ordre de grandeur de la vitesse d'un marcheur
  4 km/h
- calculer la vitesse de l'extrémité de la grande aiguille de Big Ben.

  Données Wikipedia :

  - L'horloge est composée de quatre cadrans, un sur chaque face, de sept mètres de diamètre et d'une cloche pesant 13,5 tonnes pour un diamètre de 2,7 mètres et une hauteur de 2,2 mètres.
  - Les aiguilles des minutes mesurent 4,2 mètres de long.
  - Les aiguilles des heures mesurent 2,7 mètres de long.
  - Les chiffres mesurent environ 60 cm de long.

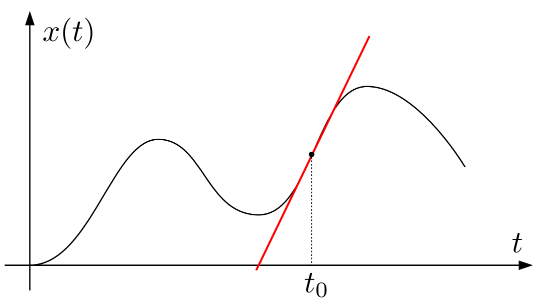
  Le diamètre du cadran est de 7 m. On prendra $R = 3,5$ m pour la longueur séparant le centre du cadran de la pointe de la grande aiguille (cette longueur est inférieure à la longueur totale de la grande aiguille).
  La grande aiguille fait un tour en 1 heure, soit 3600 s.
  $v = R\omega = 3,5 \times \frac{2\pi}{3600} = \frac{3,5\times 2\pi}{3600} = 6,1.10^{-3}$ m.s^{-1} $= 6,1$ mm.s^{-1} $= 2,2.10^{-2}$ km/h.

- calculer la vitesse d'un élève assis sur sa chaise par rapport au référentiel géocentrique (c'est un référentiel qui a pour origine le centre de la Terre et dont les trois axes sont orientés vers trois étoiles lointaines. Dans ce référentiel, la Terre possède un mouvement de rotation autour de l'axe des pôles et effectue un tour en un jour sidéral, soit environ 24h).
  Données : rayon de la Terre $R_T = 6,4.10^3$ km, latitude de Lannion $\lambda = 49°$.
  Dans le référentiel géocentrique l'élève décrit un cercle d'axe correspondant à l'axe des pôles et de rayon $R_T \cos\lambda$.
  $v = R_T \cos\lambda\, \omega = 6,4.10^6 \times \cos(49°) \times \frac{2\pi}{24\times 3600} = 3,1.10^2$ m.s^{-1} $= 1,1.10^3$ km.h^{-1}.

III.3. Analyse graphique de $x(t)$ et $v(t)$

On se place dans le cas particulier du mouvement rectiligne.

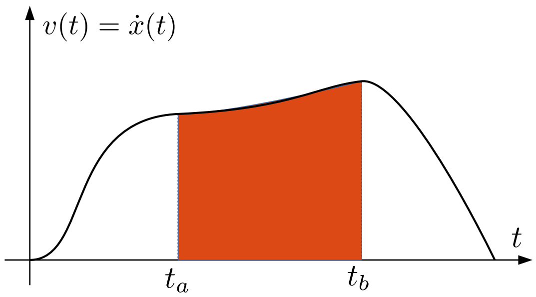
On trace, pour un mouvement donné, la courbe $x(t)$ représentant la position en fonction du temps.



La pente de la tangente à la courbe de la fonction $x(t)$ à un instant donné t_0 correspond à la vitesse scalaire instantanée $\dot{x}(t_0)$.

Analyse : indiquer graphiquement les instants où $\dot{x} = 0$, puis les plages horaires où $\dot{x} < 0$ et celles où $\dot{x} > 0$.

On trace, pour un mouvement donné, la courbe $v(t) = \dot{x}$ donnant la vitesse en fonction du temps.



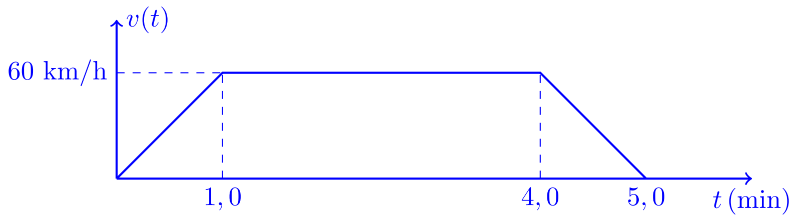
$$\int_{t_a}^{t_b} v(t)\mathrm{d}t = \int_{t_a}^{t_b} \mathrm{d}x = x(t_b) - x(t_a)$$

> La mesure de l'aire sous la courbe de la fonction $v(t)$ entre deux instants t_a et t_b permet de calculer la distance parcourue pendant la durée $t_b - t_a$.

Application :
Le passager d'une voiture constate que celle-ci met 1,0 minute pour atteindre la vitesse de 60 km/h, reste à cette vitesse pendant 3 minutes puis met à nouveau 1,0 minute à décélérer jusqu'à l'arrêt complet.

1. Représenter $v(t)$ en supposant que la vitesse varie linéairement avec le temps durant les phases d'accélération et de décélération.
2. En déduire la distance totale parcourue.
3. Calculer la vitesse moyenne en km/h.

1.



2. La distance totale parcourue d correspond à l'aire sous la courbe qui équivaut à l'aire d'un rectangle de côtés 4 min et 60 km/h. D'où :

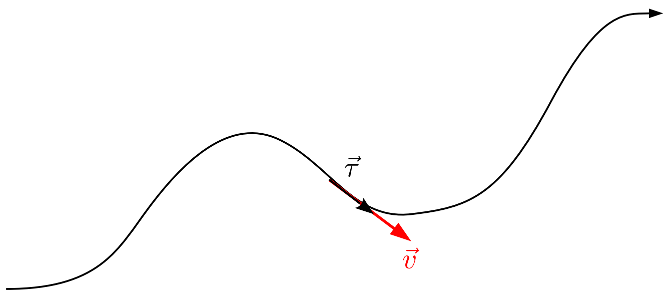
   $d = (4,0 \times 60) \times \dfrac{60}{3,6} = 4,0 \times \dfrac{36.10^2}{3,6} = 4,0.10^3 \text{ m} = 4,0.10^3 \text{ km}$

   On peut aller plus vite en remarquant que 60 km/h = 1 km/min. D'où 4 km parcourus pour 4 minutes.

3. La vitesse moyenne $v_m = \dfrac{4,0}{\frac{5}{60}} = \dfrac{4,0 \times 60}{5} = 48$ km/h.

III.4. Vecteur vitesse

Même si dans un premier temps, nous ne manipulons que des grandeurs scalaires, il faut d'ores et déjà prendre conscience que la vitesse est un vecteur tangent à la trajectoire du point M.



$$\vec{v} = v\vec{\tau} = \dot{s}\vec{\tau}$$

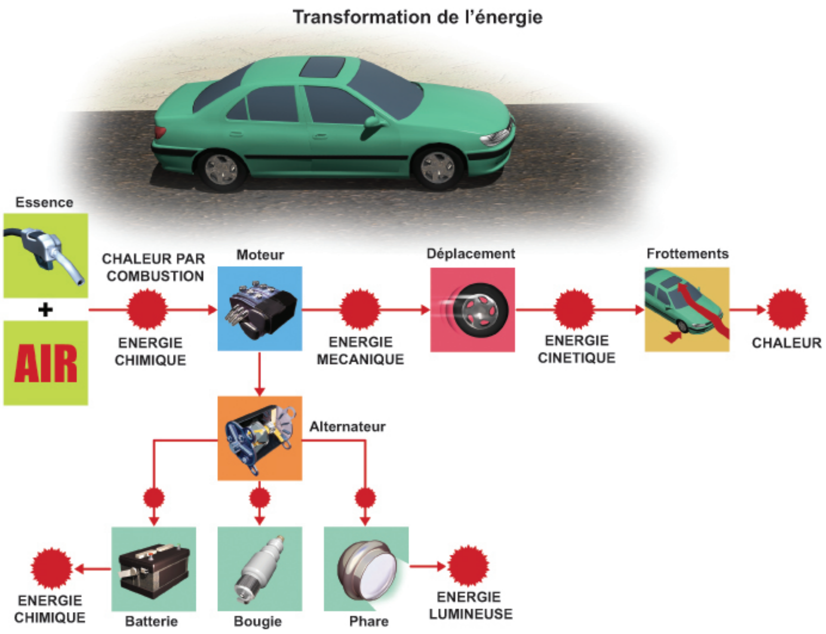
avec $\vec{\tau}$ vecteur unitaire tangent à la trajectoire.

Pour un mouvement rectiligne uniforme le **vecteur** vitesse est constant : $\vec{v} = \vec{Cte}$.

IV. Énergie cinétique

IV.1. L'énergie : un concept protéiforme

L'**énergie** prend de multiples formes. Elle se conserve mais se transforme.



http://www.cea.fr/comprendre/Pages/energies/complements-energie/transformations-energie-produites-dans-voiture.aspx

IV.2. Énergie cinétique

Un système en mouvement par rapport à un référentiel possède une énergie dite **énergie cinétique**.

On définit l'**énergie cinétique** d'un point matériel, de masse m *(masse inerte ou masse inertielle)*, de vitesse v **par rapport à un référentiel donné**, par

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2$$

en unité SI : $[E_c] =$ kg.m^2.s^{-2} = J (joule).

— pour un mouvement rectiligne suivant l'axe Ox : $E_c = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$

— pour un mouvement circulaire de rayon R : $E_c = \dfrac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 = \dfrac{1}{2}mR^2\omega^2$

IV.3. Ordre de grandeur

Calculer l'énergie cinétique d'un moustique (masse 5 mg, vitesse 2 km/h)
$E_c = \frac{1}{2} \times 5.10^{-6} \times (\frac{2.\cancel{10^3}}{3.6.\cancel{10^3}})^2 = 8.10^{-7}$ J

Calculer le rapport des énergies cinétiques d'une même voiture roulant à 80 km/h et à 90 km/h.
L'énergie cinétique étant proportionnelle au carré de la vitesse :

$$\frac{E_c(90)}{E_c(80)} = \left(\frac{90}{80}\right)^2 = \left(\frac{9}{8}\right)^2 = 1,3$$

Calculer l'énergie cinétique d'un astéroïde de masse $m = 5,4.10^9$ kg possédant une vitesse $v = 20$ km.s^{-1} par rapport au référentiel géocentrique.
$E_c = \frac{1}{2} \times 5,4.10^9 \times (20.10^3)^2 = 1,1.10^{18}$ J

Extrait du programme :

Notions et contenus	Capacités exigibles
1. Observation d'un mouvement	
Point matériel	Citer des exemples de systèmes pouvant se ramener à l'étude de leur centre de masse.
Principe d'inertie	Citer quelques exemples d'expériences où les référentiels d'étude peuvent être considérés comme galiléens.
Énergie cinétique	Définir la vitesse et l'énergie cinétique d'un point matériel.