

**EM 8 a - Ondes électromagnétiques dans le vide**

**I. Équations de Maxwell**

Les quatre équations de Maxwell constituent le fondement de la théorie électromagnétique. Elles furent publiées en 1864. En 1885, Hertz fut le premier à produire et à détecter des ondes électromagnétiques, autres que des ondes lumineuses, prédites par la théorie de Maxwell et à mesurer leur vitesse de propagation.

**I.1. Énoncé**

Le champ électromagnétique  $(\vec{E}, \vec{B})$  est défini dans un référentiel  $\mathcal{R}$  donné, par la force qui s'exerce sur une particule chargée  $q$ , dite **force de Lorentz** :

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

Dans un référentiel  $\mathcal{R}$  galiléen, le champ électromagnétique vérifie les quatre **équations de Maxwell** :

Maxwell-Gauss $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	Maxwell-Faraday $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
Maxwell-Flux $\text{div } \vec{B} = 0$	Maxwell-Ampère $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \left( \vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$

On distingue les équations avec sources (Maxwell-Gauss et Maxwell-Ampère), qui contiennent les termes  $\rho$  et  $\vec{j}$  correspondant aux densités volumiques de charges et de courants sources du champ électromagnétique, des équations sans sources (Maxwell-Flux ou Maxwell-Thomson et Maxwell-Faraday).

En régime stationnaire :

Maxwell-Gauss $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	Maxwell-Faraday $\text{rot } \vec{E} = \vec{0}$
Maxwell-Flux $\text{div } \vec{B} = 0$	Maxwell-Ampère $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$

On retrouve les lois locales de l'électrostatique et de la magnétostatique. On constate alors que les équations en  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  sont découplées.

**I.2. Forme intégrée de l'équation de Maxwell-Faraday**

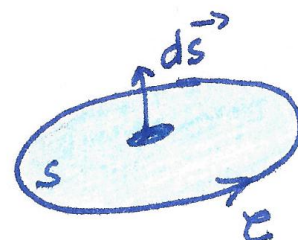
On a déjà vu dans les cours d'électrostatique et de magnétostatique que

- la forme intégrée de l'équation de Maxwell-Gauss donne le théorème de Gauss.
- la forme intégrée de l'équation de Maxwell-Flux indique que  $\vec{B}$  est à flux conservatif.
- la forme intégrée de l'équation de Maxwell-Ampère en régime stationnaire donne le théorème d'Ampère.
- la forme intégrée de l'équation de Maxwell-Faraday en régime stationnaire indique que  $\vec{E}$  est à circulation conservative et permet de poser  $\vec{E} = -\text{grad } V$ .

En régime variable, l'équation de Maxwell-Faraday indique que  $\vec{E}$  n'est plus à circulation conservative.

Calculons la circulation de  $\vec{E}$  sur un contour  $\mathcal{C}$  fermé, orienté, sur lequel s'appuie une surface  $\mathcal{S}$  dont l'orientation se déduit de celle de  $\mathcal{C}$  par la règle de la main droite.  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{S}$  sont supposés fixes dans le référentiel d'étude. On a, d'après le théorème de Stokes :

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \iint_{\mathcal{S}} \text{rot } \vec{E} \cdot d\vec{S} = - \iint_{\mathcal{S}} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$



La surface  $\mathcal{S}$  étant fixe, on peut sortir l'opérateur de dérivation temporelle de l'intégrale :

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt} \iint_{\mathcal{S}} \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

On reconnaît la dérivée du flux de  $\vec{B}$  à travers le circuit  $\mathcal{C}$ .

Considérons  $\mathcal{C}$  un circuit filiforme. On définit  $e$  la force électromotrice de ce circuit par

$$e = \oint_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

On a alors

$$e = -\frac{d\phi}{dt}$$

On retrouve la **loi de Faraday** vue dans le cours sur l'induction électromagnétique.

*Remarque* : interprétation énergétique de la f.e.m.  $e$

Soit une charge ponctuelle  $q$  :

$$qe = \oint_{\mathcal{C}} q\vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

$qe$  représente le travail de la force électrique  $q\vec{E}$  s'exerçant sur la charge  $q$ , et donc l'énergie algébriquement reçue par cette charge lorsqu'elle a parcouru un tour de circuit.

### I.3. Conservation de la charge

On a vu que la conservation de la charge était un postulat fondamental de la physique qui se traduit par la relation locale  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0$  (cf EM3). Il n'est pas nécessaire d'ajouter de postulat aux quatre équations de Maxwell car elles le contiennent déjà.

On a toujours :  $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{B}) = 0$

$$\operatorname{div} \vec{j} + \varepsilon_0 \operatorname{div} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0$$

On peut inverser les dérivées temporelles et spatiales (théorème de Cauchy-Schwarz) :

$$\operatorname{div} \vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{E} = 0$$

$$\operatorname{div} \vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\rho}{\varepsilon_0} \right) = 0$$

On retrouve l'**équation locale de conservation de la charge** :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0$$

Ainsi, il est inutile d'ajouter ce postulat aux équations de Maxwell.

### I.4. Équations de Maxwell dans le vide

Dans le vide  $\rho = 0$  et  $\vec{j} = \vec{0}$ .

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= 0 & \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0 & \operatorname{rot} \vec{B} &= \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

## II. Équation locale de conservation de l'énergie : vecteur de Poynting

### II.1. Bilan énergétique. Vecteur flux d'énergie électromagnétique

#### a) Densité volumique d'énergie électromagnétique


On a montré dans les chapitres précédents que l'on pouvait associer à un champ électrique  $\vec{E}$  une densité volumique d'énergie  $\frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2$  et à un champ magnétique  $\vec{B}$  une densité volumique d'énergie  $\frac{1}{2\mu_0} B^2$ .

De manière générale, on peut définir la **densité volumique d'énergie électromagnétique**  $w_{em}$ .

On note  $w_{em}$  la **densité volumique d'énergie électromagnétique**.

Un volume élémentaire  $d\tau$  entourant un point  $M$  donné contient une énergie électromagnétique :

$$w_{em}(M, t) d\tau$$



$[w_{em}] = \text{J.m}^{-3}$

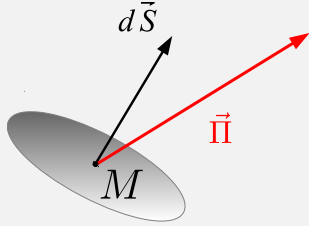
#### b) Vecteur flux d'énergie électromagnétique

On définit  $\vec{\Pi}$  le vecteur flux d'énergie électromagnétique, appelé **vecteur de Poynting**.

$\vec{\Pi} \cdot d\vec{S} dt$  représente l'énergie électromagnétique ayant traversé la surface orientée élémentaire  $d\vec{S}$  pendant le temps  $dt$ .

- ▷  $\vec{\Pi} \cdot d\vec{S}$  est donc homogène à une puissance (en watt).
- ▷  $\|\vec{\Pi}\|$  est homogène à une puissance par unité de surface.

$$[\|\vec{\Pi}\|] = \text{W.m}^{-2}.$$



### II.2. Bilan énergétique dans le vide sur un volume macroscopique

La force de Lorentz peut s'écrire sous la forme :

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

La force magnétique  $q\vec{v} \wedge \vec{B}$  a une puissance nulle car  $q(\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v} = 0$ . Seule la force électrique  $q\vec{E}$  peut transférer de l'énergie à une charge.

On a vu (voir chapitre EM3) que la puissance volumique cédée par le champ électrique à un conducteur avait pour expression  $\mathcal{P}_v = \vec{j} \cdot \vec{E}$ .

**Dans le vide**,  $\vec{j} = \vec{0}$ , l'énergie électromagnétique ne peut pas être convertie en une autre forme d'énergie. Elle est donc conservée.

On souhaite exprimer localement la conservation de l'énergie électromagnétique **dans le vide** à partir d'un bilan macroscopique sur un volume  $\mathcal{V}$  donné.

On note  $\mathcal{E}_{em}(t)$  l'énergie électromagnétique contenue dans ce volume  $\mathcal{V}$  à l'instant  $t$ . La variation d'énergie électromagnétique contenue dans le volume  $\mathcal{V}$  entre l'instant  $t$  et l'instant  $t+dt$  est égale l'énergie algébriquement **reçue** pendant  $dt$ . On calcule donc le flux **entrant** de  $\vec{\Pi}$  (d'où l'orientation  $-\vec{dS}$  du vecteur surface).

$$\mathcal{E}_{em}(t + dt) - \mathcal{E}_{em}(t) = \iint_{\Sigma} \vec{\Pi} \cdot (-\vec{dS}) dt$$

avec

$$\mathcal{E}_{em}(t + dt) - \mathcal{E}_{em}(t) = \iiint_{\mathcal{V}} w_{em}(M, t + dt) d\tau - \iiint_{\mathcal{V}} w_{em}(M, t) d\tau$$

$$\mathcal{E}_{em}(t + dt) - \mathcal{E}_{em}(t) = \iiint_{\mathcal{V}} [w_{em}(M, t + dt) - w_{em}(M, t)] d\tau$$

$$\mathcal{E}_{em}(t + dt) - \mathcal{E}_{em}(t) = \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial w_{em}}{\partial t}(M, t) dt d\tau$$

d'où

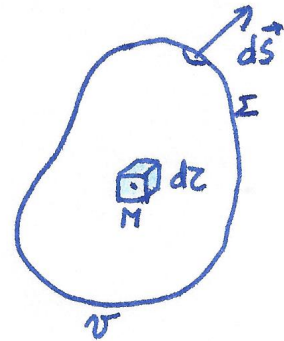
$$\iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial w_{em}}{\partial t}(M, t) d\tau dt = \iint_{\Sigma} \vec{\Pi} \cdot (-\vec{dS}) dt$$

En utilisant de théorème d'Ostrogradski

$$\iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial w_{em}}{\partial t}(M, t) d\tau = - \iiint_{\mathcal{V}} \text{div } \vec{\Pi} d\tau$$

La relation devant être vérifiée quel que soit  $\mathcal{V}$

$$\frac{\partial w_{em}}{\partial t} = - \text{div } \vec{\Pi}$$



**Dans le vide**, la densité volumique d'énergie  $w_{em}$  et le vecteur flux d'énergie  $\vec{\Pi}$ , appelé vecteur de Poynting vérifient la relation :

$$\frac{\partial w_{em}}{\partial t} + \text{div } \vec{\Pi} = 0$$



### II.3. Détermination de $w_{\text{em}}$ et du vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$

On part des équations de Maxwell dans le vide :

$$\text{div } \vec{E} = 0 \quad \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{M.F.})$$

$$\text{div } \vec{B} = 0 \quad \text{rot } \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (\text{M.A.})$$

En multipliant scalairement l'équation de Maxwell-Faraday (M.F.) par  $\vec{B}$  et l'équation de Maxwell-Ampère (M.A.) par  $\vec{E}$ , on fait apparaître, à un facteur multiplicatif près, les densités volumiques d'énergie électrique et magnétique.

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{B} \cdot \text{rot } \vec{E} = -\vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1) \\ \vec{E} \cdot \text{rot } \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (2) \end{array} \right.$$

(1) - (2)

$$\vec{B} \cdot \text{rot } \vec{E} - \vec{E} \cdot \text{rot } \vec{B} = -\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} B^2 + \frac{1}{2} \mu_0 \varepsilon_0 E^2 \right)$$

D'après la formule d'analyse vectorielle<sup>1</sup> :  $\text{div}(\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{B} \cdot \text{rot } \vec{A} - \vec{A} \cdot \text{rot } \vec{B}$  on peut écrire :

$$\vec{B} \cdot \text{rot } \vec{E} - \vec{E} \cdot \text{rot } \vec{B} = \text{div}(\vec{E} \wedge \vec{B})$$

d'où

$$\text{div}(\vec{E} \wedge \vec{B}) + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} B^2 + \frac{1}{2} \mu_0 \varepsilon_0 E^2 \right) = 0$$

On divise par  $\mu_0$  pour obtenir des termes homogènes à une densité volumique d'énergie :

$$\text{div} \left( \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2\mu_0} B^2 + \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 \right) = 0$$

En posant  $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$  et  $w_{\text{em}} = \frac{1}{2\mu_0} B^2 + \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2$  on obtient

$$\frac{\partial w_{\text{em}}}{\partial t} + \text{div } \vec{\Pi} = 0$$

**Retenir :**

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$$

$$w_{\text{em}} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2$$

1. cette formule n'est pas à connaître par cœur

## II.4. Quelques ordres de grandeurs à connaître

### Flux solaire terrestre :

L'énergie traversant, pendant une seconde, une surface de 1 m<sup>2</sup> placée perpendiculairement au rayonnement solaire et en dehors de l'atmosphère terrestre vaut : 1360 J.

On en déduit la puissance par unité de surface (et donc la norme du vecteur de Poynting) :  $\mathcal{P}_s = 1360 \text{ W.m}^{-2}$ .

En déduire la puissance moyenne reçue par unité de surface terrestre, située hors atmosphère.

Pendant une durée  $\Delta t = 1$  jour la Terre reçoit une énergie

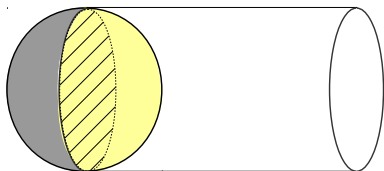
$$\mathcal{E} = \mathcal{P}_s \pi R_T^2 \Delta t$$

avec  $R_T$  le rayon de la Terre.

La surface totale de la Terre vaut  $4\pi R_T^2$ . On en déduit la puissance moyenne par unité de surface de la Terre :

$$\langle \mathcal{P}_s \rangle = \frac{1}{\Delta t} \frac{\mathcal{P}_s \pi R_T^2 \Delta t}{4\pi R_T^2} = \frac{\mathcal{P}_s}{4} = 340 \text{ W.m}^{-2}$$

C'est cette valeur que l'on utilise lorsqu'on établit le bilan radiatif de la Terre.



*Remarque :* avant d'arriver au sol, le rayonnement solaire est en partie absorbé par l'atmosphère. Cette absorption dépend de l'épaisseur de l'atmosphère traversée et de la pureté du ciel (présence d'humidité, de poussières ...). L'épaisseur de l'atmosphère traversée dépend de l'inclinaison des rayons solaires. Lorsque le soleil est au zénith on peut, par beau temps récupérer environ  $800 \text{ W.m}^{-2}$ .

Les photographies ci-dessous ont été prises dans une station service près de Lyon. Le dispositif utilise l'énergie solaire pour chauffer l'eau de la station. Un panneau explique l'avantage d'utiliser la forme sphérique pour récupérer l'énergie solaire.





**Faisceau laser :**

On considère un faisceau laser de diamètre  $d = 1,0 \text{ mm}$  et de puissance  $\mathcal{P} = 1,0 \text{ mW}$ . Calculer la norme du vecteur de Poynting.

$$\|\vec{\Pi}\| = \frac{\mathcal{P}}{\frac{\pi d^2}{4}} = \frac{4 \times 10^{-3}}{\pi 1,0 \cdot 10^{-6}} = \frac{4 \cdot 10^3}{\pi} = 1,3 \cdot 10^3 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}.$$

### III. Ondes électromagnétiques

#### III.1. Définition de l'opérateur laplacien vectoriel

##### Rappel sur le laplacien scalaire

En électrostatique,  $\overrightarrow{\text{rot}} E = \vec{0}$  permet de poser  $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$ .

Dans le vide ( $\rho = 0$ ),  $\text{div } \vec{E} = 0$  entraîne alors  $-\text{div}(\overrightarrow{\text{grad}})V = 0$  soit

$$\Delta V = 0$$

où  $\Delta V = \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}} V)$  représente le **laplacien scalaire** de  $V$ . Il est l'équivalent à trois dimensions de la courbure (liée à la dérivée seconde d'une fonction) à une dimension.

En coordonnées cartésiennes :

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

Avec la notation nabla (utilisable uniquement en coordonnées cartésiennes) :  $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{u}_z$

$$\Delta V = \nabla^2 V$$

##### Retenir :

Soit  $V$  un champ scalaire. On définit le **laplacien scalaire**  $\Delta V$  par

$$\Delta V = \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}} V)$$

En coordonnées cartésiennes :

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

##### Définition du laplacien vectoriel

Soit  $\vec{A}$  un champ vectoriel, on définit l'opérateur **laplacien vectoriel**  $\vec{\Delta} \vec{A}$  par la relation

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div } \vec{A}) - \vec{\Delta} \vec{A}$$

Il a pour expression en **coordonnées cartésiennes** :

$$\vec{\Delta} \vec{A} = \Delta A_x \vec{u}_x + \Delta A_y \vec{u}_y + \Delta A_z \vec{u}_z$$

ce qui correspond à :

$$\vec{\Delta} \vec{A} = \begin{cases} \Delta A_x = \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \\ \Delta A_y = \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} \\ \Delta A_z = \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \end{cases}$$

### III.2. Établissement de l'équation d'onde

Dans le vide  $\rho = 0$  et  $\vec{j} = \vec{0}$ , les équations de Maxwell deviennent :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= 0 & \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0 & \operatorname{rot} \vec{B} &= \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

#### • Équation vérifiée par $\vec{E}$

$$\operatorname{rot} (\operatorname{rot} \vec{E}) = \operatorname{grad} (\underbrace{\operatorname{div} \vec{E}}_{=0}) - \Delta \vec{E}$$

$$\operatorname{rot} \left( -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\Delta \vec{E}$$

On peut inverser les dérivées spatiales et temporelles (théorème de Cauchy-Schwarz)

$$-\frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{rot} \vec{B}) = -\Delta \vec{E}$$

$$\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \Delta \vec{E}$$

$$\Delta \vec{E} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

On trouve une équation de propagation de la forme :

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad \text{avec} \quad c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$$

#### • Équation vérifiée par $\vec{B}$

On peut procéder de même avec le champ magnétique :

$$\operatorname{rot} (\operatorname{rot} \vec{B}) = \operatorname{grad} (\underbrace{\operatorname{div} \vec{B}}_{=0}) - \Delta \vec{B}$$

$$\operatorname{rot} \left( \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = -\Delta \vec{B}$$

D'où, en inversant les dérivées spatiales et temporelles (théorème de Cauchy-Schwarz)

$$\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{rot} \vec{E}) = -\Delta \vec{B}$$

$$-\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = -\Delta \vec{B}$$

$$\Delta \vec{B} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

On retrouve une équation de propagation de la forme :

$$\Delta \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad \text{avec} \quad c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$$

On obtient pour  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  une généralisation à trois dimensions de l'équation de D'Alembert.

En coordonnées cartésiennes, chaque composante du champ électrique et du champ magnétique vérifie l'équation de propagation :

$$\Delta E_i - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_i}{\partial t^2} = 0$$

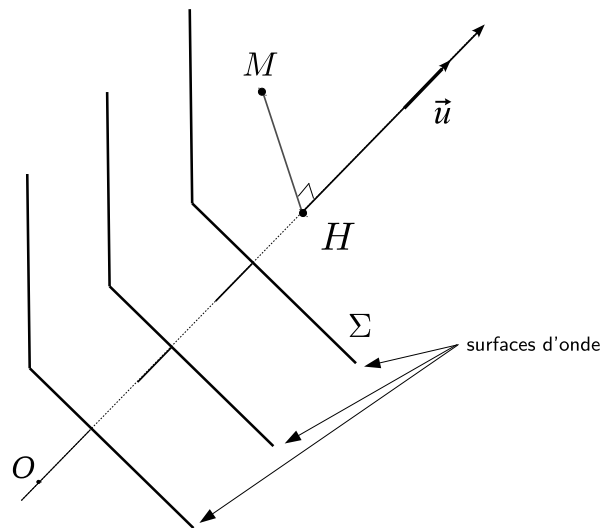
avec  $c$  vitesse de propagation des ondes électromagnétiques dans le vide :

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$$

### III.3. Ondes électromagnétiques planes OEMP

On considère une onde électromagnétique caractérisé par les champs  $\vec{E}(M, t)$  et  $\vec{B}(M, t)$ . On nomme **surface d'onde**  $\Sigma$  le lieu des points  $M$  où, à  $t = t_0$  fixé, le signal  $\vec{E}(M, t_0)$  (ou  $\vec{B}(M, t_0)$ ) a la même valeur.

Pour une **onde plane**, les surfaces  $\Sigma$  sont des plans, perpendiculaires à une même direction (voir schéma ci-dessous). On note  $\vec{u}$  le vecteur unitaire associé cette direction.



On en déduit l'expression générale de  $\vec{E}$  :

$$\vec{E}(M, t) = \vec{E}(\overline{OH}, t) = \vec{E}(\overline{OM} \cdot \vec{u}, t)$$

Si on choisit la direction  $\vec{u}_x$  telle que  $\vec{u} = \vec{u}_x$ , on aura

$$\vec{E}(M, t) = \vec{E}(x, t)$$

Lorsqu'une onde est plane, on peut toujours choisir un repère cartésien tel que ses grandeurs vibrantes (ici  $\vec{E}$  ou  $\vec{B}$ ) ne dépendent que d'une variable d'espace (soit  $x$ , soit  $y$ , soit  $z$ ).

### III.4. Ondes électromagnétiques planes progressives OEMPP

Rappels : préciser la nature des signaux dont les expressions sont indiquées ci-dessous :

- $f(x - ct)$  onde plane se propageant dans le sens des  $x$  croissants à la vitesse  $c$ .
- $f(t - \frac{x}{c})$  onde plane se propageant dans le sens des  $x$  croissants à la vitesse  $c$ .
- $g(z + ct)$  onde plane se propageant dans le sens des  $z$  décroissants à la vitesse  $c$ .
- $g(t + \frac{y}{c})$  onde plane se propageant dans le sens des  $y$  décroissants à la vitesse  $c$ .

On considère une onde électromagnétique plane progressive se propageant dans la direction de  $\vec{u}_x$  à la vitesse  $c$ . Elle aura pour expression :

$$\vec{E}\left(t - \frac{x}{c}\right) \text{ ou, de manière équivalente, } \vec{E}(x - ct)$$

De manière générale, une onde électromagnétique plane progressive se propageant dans la direction du vecteur unitaire  $\vec{u}$  aura pour expression :

$$\vec{E}\left(t - \frac{\overrightarrow{OM} \cdot \vec{u}}{c}\right) \text{ ou } \vec{E}(\overrightarrow{OM} \cdot \vec{u} - ct)$$

Si on choisit la direction  $\vec{u}_x$  telle que  $\vec{u} = \vec{u}_x$ , on aura

$$\vec{E}\left(t - \frac{x}{c}\right) \text{ ou } \vec{E}(M, t) = \vec{E}(x - ct)$$

On peut vérifier que ce champ est solution de l'équation de d'Alembert :  $\boxed{\vec{\Delta} \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}}$ .

On peut écrire  $\vec{E}\left(t - \frac{x}{c}\right) = E_x\left(t - \frac{x}{c}\right) \vec{u}_x + E_y\left(t - \frac{x}{c}\right) \vec{u}_y + E_z\left(t - \frac{x}{c}\right) \vec{u}_z$

• Calcul de  $\vec{\Delta} \vec{E}$  :

On calcule  $\vec{\Delta} \vec{E} = \Delta E_x \vec{u}_x + \Delta E_y \vec{u}_y + \Delta E_z \vec{u}_z$

avec  $\Delta E_x = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) E_x\left(t - \frac{x}{c}\right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} E_x\left(t - \frac{x}{c}\right)$  car  $E_x$  ne dépend pas de  $y$ , ni de  $z$ .

de même  $\Delta E_y = \frac{\partial^2}{\partial x^2} E_y$  et  $\Delta E_z = \frac{\partial^2}{\partial x^2} E_z$ .

On pose  $u = t - \frac{x}{c}$ . On a  $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{c}$  et  $\frac{\partial u}{\partial t} = 1$

$$\frac{\partial}{\partial x} E_x\left(t - \frac{x}{c}\right) = \frac{dE_x}{du} \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{c} \frac{dE_x}{du}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} E_x\left(t - \frac{x}{c}\right) = -\frac{1}{c} \frac{d^2 E_x}{du^2} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{c^2} \frac{d^2 E_x}{du^2}$$

On peut montrer de même que  $\frac{\partial^2}{\partial x^2} E_y = \frac{1}{c^2} \frac{d^2 E_y}{du^2}$  et  $\frac{\partial^2}{\partial x^2} E_z = \frac{1}{c^2} \frac{d^2 E_z}{du^2}$ .

$$\text{ainsi } \boxed{\vec{\Delta} \vec{E} = \frac{1}{c^2} \left( \frac{d^2 E_x}{du^2} \vec{u}_x + \frac{d^2 E_y}{du^2} \vec{u}_y + \frac{d^2 E_z}{du^2} \vec{u}_z \right) = \frac{1}{c^2} \frac{d^2 \vec{E}}{du^2}}$$

• Calcul de  $\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$  :

$$\frac{\partial}{\partial t} E_x\left(t - \frac{x}{c}\right) = \frac{dE_x}{du} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{dE_x}{du}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} E_x\left(t - \frac{x}{c}\right) = \frac{d^2 E_x}{du^2} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{d^2 E_x}{du^2}$$

de même  $\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = \frac{d^2 E_y}{du^2}$  et  $\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = \frac{d^2 E_z}{du^2}$ .

$$\text{ainsi } \boxed{\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \left( \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \vec{u}_x + \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \vec{u}_y + \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} \vec{u}_z \right) = \frac{d^2 \vec{E}}{du^2}}$$

On vérifie bien  $\vec{\Delta} \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$

## IV. OEMPPH Onde ÉlectroMagnétique Plane Progressive Harmonique

Grâce à l'analyse de Fourier, toute onde plane peut s'exprimer comme la superposition d'ondes planes progressives harmoniques.

### IV.1. Expression générale

On note  $\vec{r} = \vec{OM}$  le vecteur position du point  $M$ . Soit  $E_i$  une composante quelconque du champ électrique sur la base  $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ . On a, pour une OEMPPH :

$$E_i = E_{0i} \cos \left( \omega \left( t - \frac{\vec{r} \cdot \vec{u}}{c} \right) + \varphi_i \right)$$

$$E_i = E_{0i} \cos \left( \omega t - \frac{\omega}{c} \vec{u} \cdot \vec{r} + \varphi_i \right)$$

On pose  $\vec{k} = \frac{\omega}{c} \vec{u} = k \vec{u}$  avec  $k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{cT} = \frac{2\pi}{\lambda}$ , appelé **vecteur d'onde**.

$$E_i = E_{0i} \cos \left( \omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_i \right)$$

Le champ électrique associé à une OEMPPH se propageant dans la direction du vecteur unitaire  $\vec{u}$  a pour expression générale :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) \begin{cases} E_{0x} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_x) \\ E_{0y} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_y) \\ E_{0z} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_z) \end{cases}$$

avec  $\vec{k} = k \vec{u} = \frac{\omega}{c} \vec{u} = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{u}$  le **vecteur d'onde** associé à cette onde.

On pourrait écrire une expression équivalente pour  $\vec{B}(\vec{r}, t)$ .

Rappels des formules à connaître :

- $\omega$  est appelée la **pulsation** de l'onde

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \text{ avec } T \text{ la } \mathbf{période} \text{ de l'onde et } f = \frac{1}{T} \text{ sa } \mathbf{fréquence}.$$

- $\lambda = cT = \frac{c}{f}$  est la **longueur d'onde** : c'est la période spatiale de l'onde. Elle correspond à la distance parcourue par l'onde en une période  $T$ . On a la relation :

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

### IV.2. Notation complexe

On peut rendre la notation du champ électrique  $\vec{E}$  beaucoup plus compacte à l'aide de la notation complexe.

On pose

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \underline{\vec{E}}_0 e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \quad \text{avec} \quad \underline{\vec{E}}_0 \begin{cases} E_{0x} e^{j\varphi_x} \\ E_{0y} e^{j\varphi_y} \\ E_{0z} e^{j\varphi_z} \end{cases}$$

avec  $\vec{E} = \text{Re}(\underline{\vec{E}})$ .

Cette notation permet de simplifier les calculs.



En coordonnées cartésiennes :  $\vec{r} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z$ .

$$\vec{k} \begin{vmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{vmatrix} \quad \vec{r} \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} \quad \vec{k} \cdot \vec{r} = k_x x + k_y y + k_z z \quad \underline{\vec{E}}(\vec{r}, t) = \underline{\vec{E}}_0 e^{j(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)}$$

$$\vec{\nabla} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} = -jk_x \\ \frac{\partial}{\partial y} = -jk_y \\ \frac{\partial}{\partial z} = -jk_z \end{vmatrix} = -j\vec{k}$$

De même,  $\frac{\partial}{\partial t} = j\omega$ .

**Retenir :**

Si on pose  $\underline{\vec{E}}(\vec{r}, t) = \underline{\vec{E}}_0 e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$  alors  $\vec{\nabla} = -j\vec{k}$  et  $\frac{\partial}{\partial t} = j\omega$

Remarque : on pourrait également poser

$$\underline{\vec{E}}(\vec{r}, t) = \underline{\vec{E}}_0 e^{j(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

dans ce cas  $\vec{\nabla} = j\vec{k}$  et  $\frac{\partial}{\partial t} = -j\omega$

Il faut donc s'adapter à la convention de signe choisie par l'énoncé.

**IV.3. Structure d'une OEMPPH dans le vide**

**a) Retranscription des équations de Maxwell**

Équations de Maxwell dans le vide :

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{E} &= 0 & \text{rot } \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{div } \vec{B} &= 0 & \text{rot } \vec{B} &= \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

retranscrites à l'aide du vecteur nabla :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 0 & \vec{\nabla} \wedge \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 & \vec{\nabla} \wedge \vec{B} &= \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

on obtient en notation complexe :

$$\begin{aligned} -j\vec{k} \cdot \underline{\vec{E}} &= 0 & -j\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}} &= -j\omega \underline{\vec{B}} \\ -j\vec{k} \cdot \underline{\vec{B}} &= 0 & -j\vec{k} \wedge \underline{\vec{B}} &= \mu_0 \epsilon_0 j\omega \underline{\vec{E}} \end{aligned}$$

**b) Structure transverse**

D'après l'équation de Maxwell-Gauss

$$\vec{k} \cdot \underline{\vec{E}} = 0$$

D'où, avec  $\vec{k} = k\vec{u}$

$$\vec{u} \cdot \underline{\vec{E}} = 0$$

En prenant la partie réelle

$$\text{Re}(\vec{u} \cdot \underline{\vec{E}}) = \vec{u} \cdot \text{Re}(\underline{\vec{E}}) = \vec{u} \cdot \vec{E} = 0$$

$$\vec{u} \cdot \vec{E} = 0$$

Le champ électrique  $\vec{E}$  est donc à tout instant perpendiculaire à la direction de propagation  $\vec{u}$ .  
On démontre de même, à partir de l'équation de Maxwell-flux,  $\vec{k} \cdot \vec{B} = 0$  que

$$\vec{u} \cdot \vec{B} = 0$$

Le champ électrique  $\vec{E}$  est donc à tout instant perpendiculaire à la direction de propagation  $\vec{u}$ .

### c) Couplage entre $\vec{E}$ et $\vec{B}$

D'après l'équation de Maxwell-Faraday, en simplifiant par  $-j$  :

$$\vec{k} \wedge \vec{E} = \omega \vec{B}$$

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$$

En prenant les parties réelles :

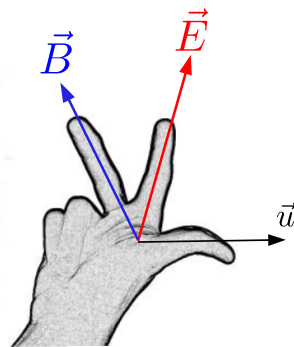
$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$$

qu'on peut écrire sous la forme

$$\vec{B} = \frac{1}{c} \vec{u} \wedge \vec{E}$$

$$\vec{B} = \frac{\vec{u} \wedge \vec{E}}{c}$$

Le trièdre  $(\vec{u}, \vec{E}, \vec{B})$  est un trièdre direct.



On calcule la norme de  $\vec{B}$ , en tenant compte du fait que  $\vec{u} \perp \vec{E}$  :

$$\|\vec{B}\| = \frac{\|\vec{u}\| \|\vec{E}\|}{c} = \frac{\|\vec{E}\|}{c}$$

**d) Relation de dispersion**

On cherche à établir la relation entre  $k$  et  $\omega$  à partir des équations de Maxwell.

$$\begin{cases} \text{M.F.} & -j\vec{k} \wedge \vec{E} = -j\omega\vec{B} \\ \text{M.A.} & -j\vec{k} \wedge \vec{B} = \mu_0\varepsilon_0 j\omega\vec{E} \end{cases} \implies \begin{cases} \text{M.F.} & \vec{k} \wedge \vec{E} = \omega\vec{B} \\ \text{M.A.} & -\vec{k} \wedge \vec{B} = \mu_0\varepsilon_0\omega\vec{E} \end{cases}$$

D'après M.F.  $\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$ . On reporte dans M.A.

$$-\vec{k} \wedge \left( \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} \right) = \mu_0\varepsilon_0\omega\vec{E}$$

D'où, en utilisant la formule du double produit vectoriel :  $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$

$$-\frac{(\vec{k} \cdot \vec{E})\vec{k} - k^2\vec{E}}{\omega} = \mu_0\varepsilon_0\omega\vec{E}$$

Or  $\vec{k} \cdot \vec{E} = 0$  (l'onde a une structure transverse). D'où

$$\begin{aligned} \frac{k^2\vec{E}}{\omega} &= \mu_0\varepsilon_0\omega\vec{E} \\ k^2 &= \mu_0\varepsilon_0\omega^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \end{aligned}$$

On retrouve la relation  $k = \frac{\omega}{c}$ .

**e) Généralisation : relation de structure**

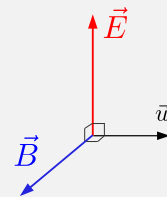
D'après l'analyse de Fourier, toute OEMPP se propageant dans la direction  $\vec{u}$  peut s'écrire comme une superposition d'OEMPPH se propageant suivant la même direction  $\vec{u}$  avec des pulsations différentes. Or la structure d'une OEMPPH est indépendante de  $\omega$ . On peut donc étendre les propriétés établies pour les OEMPPH aux OEMPP.

Une OEMPP dans le vide se propageant dans la direction  $\vec{u}$  a une structure transverse

$$\vec{u} \cdot \vec{E} = 0$$

$$\vec{u} \cdot \vec{B} = 0$$

et  $(\vec{u}, \vec{E}, \vec{B})$  forme un trièdre direct avec :  $\vec{B} = \frac{\vec{u} \wedge \vec{E}}{c}$



qui peut également s'écrire pour une OEMPP harmonique :

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$$

## V. OEMPPHR

On a montré que l'onde électromagnétique dans le vide possédait une structure transverse. Lorsque le champ magnétique vibre suivant une direction fixe  $\vec{u}_p$ , appelée direction de polarisation, alors l'onde est polarisée rectilignement.

### V.1. Expression

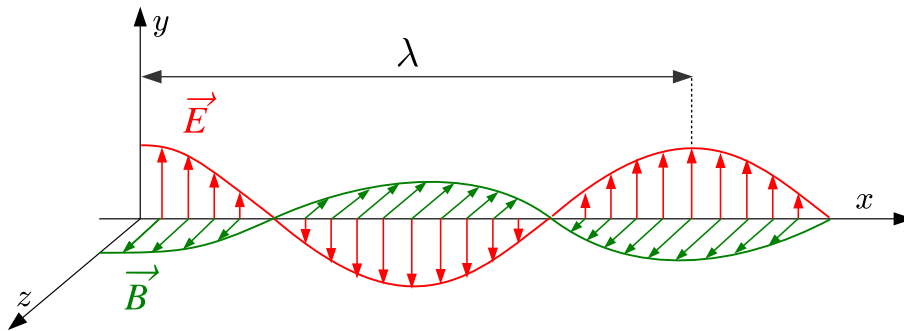
Une OEMPPHR polarisée rectilignement suivant la direction  $\vec{u}_p$ , se propageant dans la direction  $\vec{u}$  a pour expression

$$\vec{E} = E_0 e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi)} \vec{u}_p = \underline{E}_0 e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \vec{u}_p$$

avec  $\vec{k} = k\vec{u}$  le vecteur d'onde et  $\underline{E}_0 = E_0 e^{j\varphi}$  l'amplitude complexe du champ électrique.

Remarque : on peut toujours choisir une origine des temps telle que  $\varphi = 0$ . Dans ce cas l'amplitude complexe  $\underline{E}_0 = E_0$  est réelle.

Exemple : onde polarisée rectilignement suivant la direction  $\vec{u}_y$  se propageant dans la direction des  $x$  croissants.



Exprimer le champ électromagnétique :

En notation complexe :  $\vec{E} = E_0 e^{j(\omega t - kx)} \vec{u}_y$  en choisissant une origine des temps telle que  $\varphi = 0$ .

En notation réelle :  $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{u}_y$ ,

avec  $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c}$ ,

On en déduit :

$$\vec{B} = \frac{\vec{u}_x \wedge \vec{E}}{c} = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kx) \vec{u}_x \wedge \vec{u}_y = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kx) \vec{u}_z.$$

## V.2. Un peu d'entraînement

• Donner l'expression complexe du champ électrique associé aux ondes électromagnétiques planes progressives harmoniques, d'amplitude  $E_0$  et de pulsation  $\omega$ , décrites ci-dessous :

- Onde se propageant dans le sens des  $x$  croissants, polarisée rectilignement dans une direction faisant un angle de  $60^\circ$  avec la direction de  $\vec{u}_y$ .
- Onde polarisée rectilignement suivant la direction  $\vec{u}_y$  et se propageant dans une direction faisant, dans le plan  $xOz$  un angle de  $30^\circ$  avec  $\vec{u}_x$ .

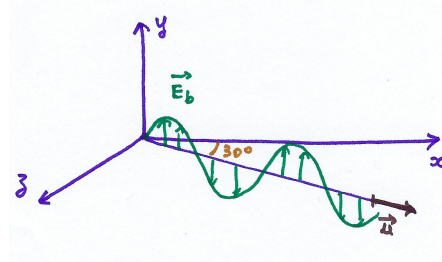
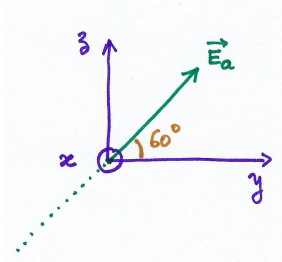
$$\triangleright \vec{E}_a = \begin{pmatrix} E_x = 0 \\ E_y = E_0 \cos(60^\circ) \cos(\omega t - kx) \\ E_z = E_0 \sin(60^\circ) \cos(\omega t - kx) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_x = 0 \\ E_y = \frac{E_0}{2} \cos(\omega t - kx) \\ E_z = \frac{E_0 \sqrt{3}}{2} \cos(\omega t - kx) \end{pmatrix}$$

$\triangleright$  La direction de propagation est  $\vec{u} = \cos(30^\circ)\vec{u}_x + \sin(30^\circ)\vec{u}_z = \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{u}_x + \frac{1}{2}\vec{u}_z$ .

On a  $\vec{k} \cdot \vec{r} = k\vec{u} \cdot \vec{r} = k(\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{u}_x + \frac{1}{2}\vec{u}_z) \cdot (x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z) = k(\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}z)$ .

On peut alors exprimer  $\vec{E}_b$  :

$$\vec{E}_b = \begin{pmatrix} E_x = 0 \\ E_y = E_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \\ E_z = 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_x = 0 \\ E_y = E_0 \cos(\omega t - \frac{k}{2}(\sqrt{3}x + z)) \\ E_z = 0 \end{pmatrix}$$



- Donner la direction de propagation ainsi que la direction de polarisation des ondes associées aux champs électriques suivants :

$$\vec{E}_1 = \begin{pmatrix} E_x = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \cos(\omega t - ky) \\ E_y = 0 \\ E_z = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \cos(\omega t - ky) \end{pmatrix} \quad \vec{E}_2 = \begin{pmatrix} E_x = 0 \\ E_y = 0 \\ E_z = E_0 \cos\left(\omega t - \frac{k}{\sqrt{2}}(x + y)\right) \end{pmatrix}$$

- ▷  $\vec{E}_1$  : OEMPPHPR se propageant dans le sens des  $y$  croissants, et dont la direction de polarisation  $\vec{u}_p$  a pour expression :

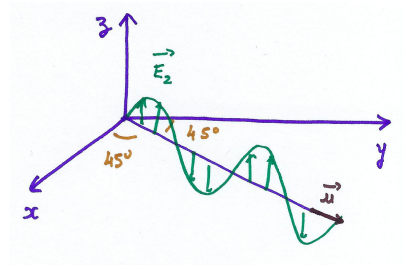
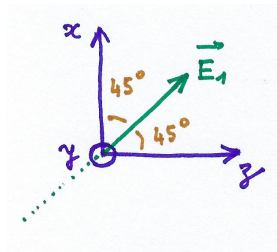
$$\vec{u}_p = \cos(45^\circ)\vec{u}_x + \sin(45^\circ)\vec{u}_z = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{u}_x + \vec{u}_z) = \frac{(\vec{u}_x + \vec{u}_z)}{\sqrt{2}}$$

- ▷  $\vec{E}_2$  : OEMPPHPR polarisée suivant la direction  $\vec{u}_z$  et se propageant dans la direction  $\vec{u}$  telle que

$$\vec{k} \cdot \vec{r} = k\vec{u} \cdot \vec{r} = \frac{k}{\sqrt{2}}(x + y)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y$$

d'où  $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{u}_x + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{u}_y$ . On en déduit l'angle de  $45^\circ$  que fait  $\vec{u}$  avec  $\vec{u}_x$  et  $\vec{u}_y$ .



### V.3. Aspect énergétique d'une OEMPPHR

La densité volumique d'énergie et le vecteur de Poynting font apparaître des produits : on doit donc, pour les évaluer, revenir à la notation réelle. En effet, la partie réelle d'un produit n'est en général pas égal au produit des parties réelles.

On peut choisir un repère et une origine des temps tels que l'OEMPPHR s'exprime sous la forme

$$\begin{cases} \vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{u}_y \\ \vec{B} = \frac{\vec{u}_x \wedge \vec{E}}{c} = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kx) \vec{u}_z \end{cases}$$

#### a) Densité volumique d'énergie électromagnétique

$$w_{em} = w_{el} + w_{mag} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2$$

avec  $w_{el}$  densité volumique d'énergie électrique et  $w_{mag}$  densité volumique d'énergie magnétique.

$$w_{el} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_0^2 \cos^2(\omega t - kx)$$

$$w_{mag} = \frac{1}{2\mu_0} \frac{E_0^2}{c^2} \cos^2(\omega t - kx) = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_0^2 \cos^2(\omega t - kx) \quad \text{car } c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}, \text{ d'où } \varepsilon_0 = \frac{1}{c^2 \mu_0}.$$

ainsi :

$$w_{el} = w_{mag} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_0^2 \cos^2(\omega t - kx)$$

On dit qu'il y a **équipartition** de l'énergie électromagnétique entre les formes magnétiques et électriques.

$$w_{em} = \varepsilon_0 E_0^2 \cos^2(\omega t - kx)$$

En valeur moyenne

$$\langle w_{em} \rangle = \varepsilon_0 E_0^2 \langle \cos^2(\omega t - kx) \rangle = \varepsilon_0 E_0^2 \times \frac{1}{2}$$

$$\langle w_{em} \rangle = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_0^2$$

#### b) Vecteur de Poynting

Là encore, on travaille avec les notations réelles des champs.

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$$

$$\vec{\Pi} = \frac{E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{u}_y \wedge \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kx) \vec{u}_z}{\mu_0} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2(\omega t - kx) \vec{u}_x$$

En valeur moyenne :

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \langle \cos^2(\omega t - kx) \rangle \vec{u}_x = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} \vec{u}_x$$

que l'on peut également exprimer sous la forme :

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2\mu_0 \varepsilon_0 c} \vec{u}_x = \frac{\varepsilon_0 E_0^2 c^2}{2c} \vec{u}_x = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2} c \vec{u}_x = \langle w_{em} \rangle c \vec{u}_x$$

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} \vec{u}_x = \langle w_{em} \rangle c \vec{u}_x$$

Le vecteur de Poynting d'une OEMPPHPR a la même direction et le même sens que celui de la propagation de l'onde <sup>a</sup>.

a. Ce résultat reste valable pour une OEMPPH avec  $E_0^2 = E_{0x}^2 + E_{0y}^2 + E_{0z}^2$ .

Remarque : une OEMPPH seule n'existe pas physiquement, car elle correspondrait à une énergie infinie sa densité volumique d'énergie étant constante dans tout l'espace et sur une durée infinie. C'est un modèle qui n'est valable que localement dans le temps et l'espace. De plus toute onde électromagnétique réelle peut s'écrire comme une superposition d'OEMPPH .

**c) Application**

On considère un faisceau laser He-Ne, de longueur d'onde  $\lambda = 632,8 \text{ nm}$ , de section  $S = 1,0 \text{ mm}^2$  et de puissance  $\mathcal{P} = 1,0 \text{ mW}$ .

On modélise ce faisceau par une OEMPPHPR. Déterminer l'amplitude  $E_0$  du champ électrique. Rappel :  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$ .

Calculons tout d'abord la puissance par unité de surface (qui correspond à la norme moyenne du vecteur de Poynting)

$$\mathcal{P}_s = \frac{\mathcal{P}}{S} = \langle \|\vec{\Pi}\| \rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c}$$

$$E_0^2 = 2\mu_0 c \mathcal{P}_s = 2\mu_0 c \frac{\mathcal{P}}{S}$$

$$E_0 = \sqrt{2\mu_0 c \frac{\mathcal{P}}{S}} = \sqrt{2 \times 4\pi \cdot 10^{-7} \times 3.10^8 \times \frac{10^{-3}}{10^{-6}}} = 2.10^2 \sqrt{2\pi \times 3} = 2.10^2 \sqrt{6\pi} = 0,9 \text{ kV.m}^{-1}$$

On obtient une valeur de l'ordre de  $1 \text{ kV.m}^{-1}$ .

**V.4. Polarisation d'une onde**

**a) Différents états de polarisation**

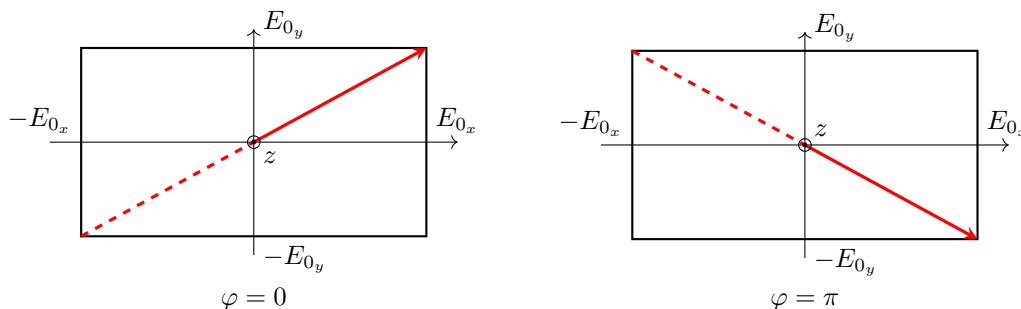
On s'est intéressé uniquement aux OEMPPH polarisées rectilignement. Que se passe-t-il si on superpose deux ondes polarisées rectilignement dans deux directions perpendiculaires se propageant dans la même direction  $\vec{u}_x$ . L'équation d'onde étant linéaire la superposition de deux OEMPPHPR est aussi solution de l'équation d'onde. On considère que la direction de propagation est  $\vec{u}_z$  et que les deux directions de polarisation perpendiculaires sont  $\vec{u}_x$  et  $\vec{u}_y$ . On a  $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$  et on peut toujours choisir une origine des temps telle que :

$$\vec{E}_1 = \begin{pmatrix} E_x = E_{0x} \cos(\omega t - kz) \\ E_y = 0 \\ E_z = 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{E}_2 = \begin{pmatrix} E_x = 0 \\ E_y = E_{0y} \cos(\omega t - kz + \varphi) \\ E_z = 0 \end{pmatrix}$$

d'où

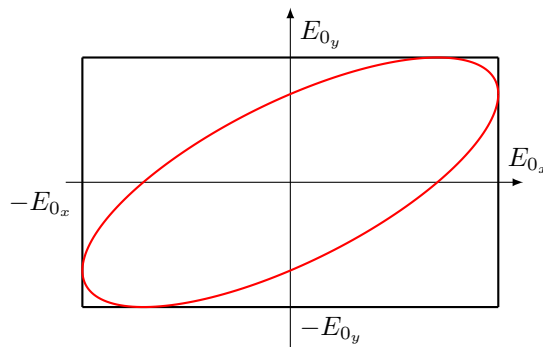
$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_x = E_{0x} \cos(\omega t - kz) \\ E_y = E_{0y} \cos(\omega t - kz + \varphi) \\ E_z = 0 \end{pmatrix}$$

Si  $\varphi = 0$  ou  $\pi$  alors on conserve une polarisation rectiligne : en un point donné, le champ  $\vec{E}$  oscille suivant l'une ou l'autre des diagonales d'un rectangle de côtés compris sur  $x$ , entre  $-E_{0x}$  et  $E_{0x}$  et sur  $y$  entre  $-E_{0y}$  et  $E_{0y}$ .





Si  $\varphi \neq 0$  et  $\varphi \neq \pi$  l'extrémité du vecteur champ magnétique décrit une ellipse, voire un cercle lorsque  $E_{0x} = E_{0y}$  et  $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ .



La lumière naturelle n'est en général pas polarisée : elle peut être vue comme une succession d'ondes polarisées rectilignement dans des directions aléatoires. La lumière qui nous environne peut être partiellement polarisée lors d'une réflexion sur une surface, ou par la diffusion atmosphérique (voir le lien dans la partie b "Diverses observations de lumières polarisées").

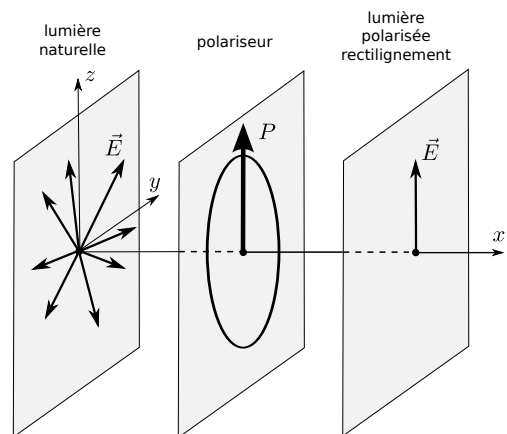
Pour visualiser les diverses polarisations :  
 Regarder du début jusqu'à 1 min 45 s environ :  
<https://www.youtube.com/watch?v=BycPkRIutqg>  
 À voir également  
[https://emanim.szialab.org/index\\_fr.html](https://emanim.szialab.org/index_fr.html)

ainsi que ce lien (un peu long, mais les différentes polarisations sont construites par addition de deux ondes polarisées rectilignement et ça peut même vous bercer le soir avant de vous endormir...)  
<https://www.youtube.com/watch?v=8YkfEft4p-w>

**b) Aspect expérimental : action d'un polariseur**

La lumière naturelle (produite par le Soleil, les lampes qui nous entourent) n'est pas polarisée : le champ  $\vec{E}$  vibre aléatoirement dans toutes les directions perpendiculaires à la direction de propagation.

Un dispositif appelé polariseur permet de sélectionner une direction particulière de vibration (correspondant à la direction du polariseur). On obtient alors une onde polarisée rectilignement.

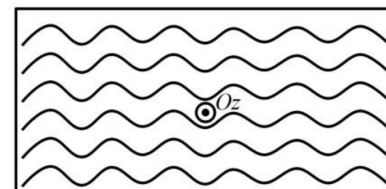


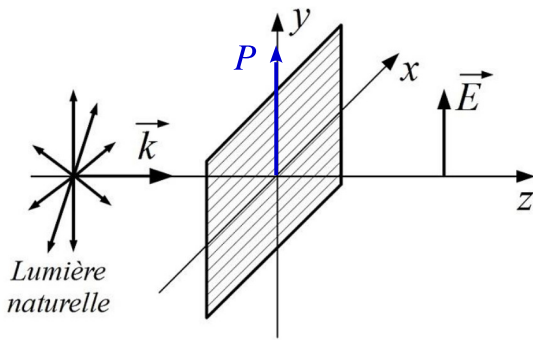
Principe du polariseur

Il s'agit d'une lame fine, composée de macromolécules toutes étirées dans le même sens.

Lorsque la lumière naturelle arrive sur le polariseur :

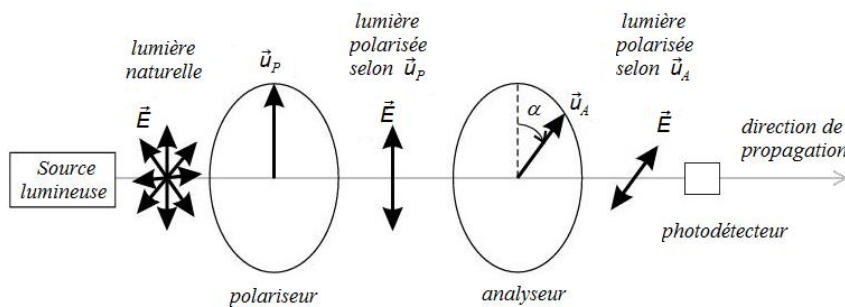
- la composante de  $\vec{E}$  parallèle aux macromolécules est (presque) totalement absorbée ;
- la composante de  $\vec{E}$  orthogonale aux macromolécules est (presque) entièrement transmise.





Il en résulte une onde polarisée rectilignement (orthogonalement aux macromolécules). Cette direction privilégiée de  $\vec{E}$  correspond à la direction de polarisation  $P$  du polariseur.

**Expérience**

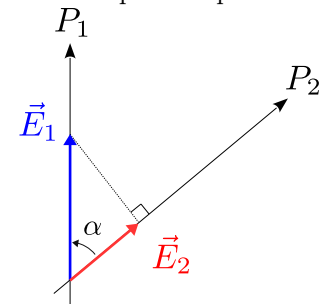


On place dans un faisceau lumineux un premier polariseur ( $P_1 = P$ ) de direction verticale puis un second polariseur ( $P_2 = A$ ) appelé analyseur dont la direction fait un angle  $\alpha$  avec la direction du premier polariseur.

Soit  $\vec{E}_1$  le champ électrique transmis par le premier polariseur. Soit  $\vec{E}_2$  le champ électrique transmis par le second polariseur. Il correspond à la projection orthogonale de  $\vec{E}_1$  sur la direction de  $P_2$ . On a ainsi

$$\|\vec{E}_2\| = \|\vec{E}_1\| \cos \alpha$$

On constate que, lorsque  $(P_1)$  et  $(P_2)$  sont croisés perpendiculairement ( $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ), alors  $\|\vec{E}_2\| = 0$  : plus aucune lumière n'est transmise.



**Pour aller plus loin : loi de Malus**

On définit l'**éclairement** comme la puissance moyenne reçue par unité de surface. Il correspond donc à la norme moyenne du vecteur de Poynting et est ainsi proportionnel au carré de la norme du champ électrique. Notons  $K$  la constante de proportionnalité. L'éclairement  $\mathcal{E}$  détecté à la sortie du second polariseur vaudra :

$$\mathcal{E} = K \|\vec{E}_2\|^2 = K \|\vec{E}_1\|^2 \cos^2 \alpha$$

Notons  $\mathcal{E}_0$  l'éclairement perçu pour  $\alpha = 0$ . On a  $\mathcal{E}_0 = K \|\vec{E}_1\|^2$ . On en déduit

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos^2 \alpha$$

qui constitue la loi de Malus.

Petite expérience à faire chez vous (surtout si vous êtes devant votre ordinateur). Si vous possédez des lunettes solaires polarisées (elles se comportent comme un polariseur), approchez les de l'écran de votre ordinateur et tourner les... Conclure quant à la nature de la lumière émise par votre écran<sup>2</sup>.

Sitographie utile :

Loi de Malus :

<http://ressources.univ-lemans.fr/AccessLibre/UM/Pedago/physique/02/optiondu/malus.html>

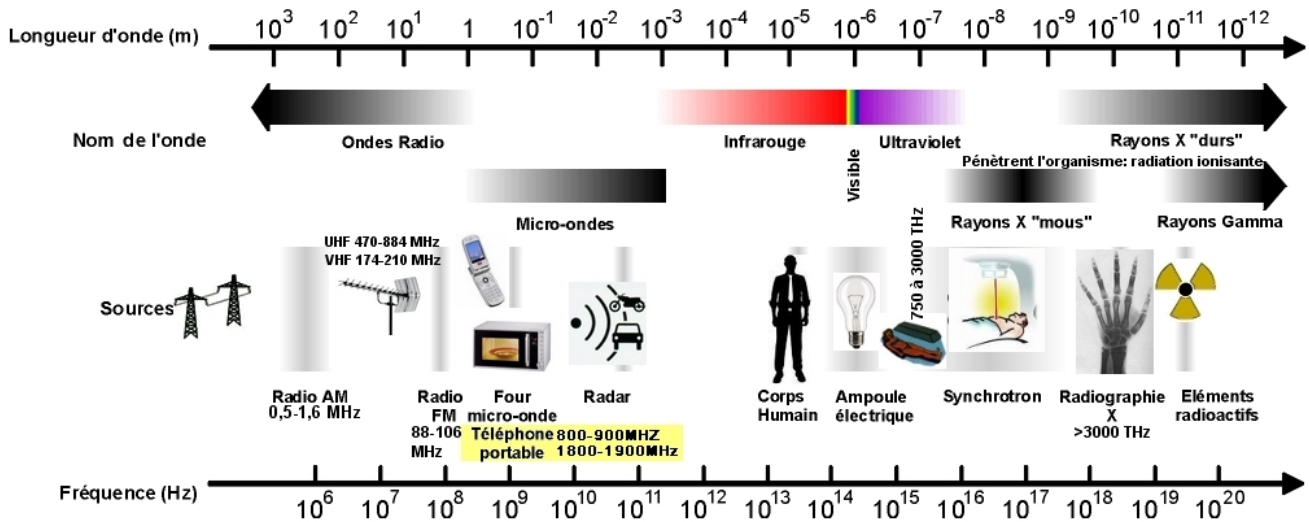
Animation :

<http://ressources.univ-lemans.fr/AccessLibre/UM/Pedago/physique/02/optiondu/ondepola3D.html>

Diverses observations de lumière polarisée : <https://www.youtube.com/watch?v=5L1mFYTntGk>

2. Voir article Idées de Physique du magazine Pour la Science Mars 2016 "Des valves à lumière dans les écrans"

## VI. Spectres des ondes électromagnétiques



Spectre des ondes électromagnétiques

Les ondes électromagnétiques sont produites par des oscillations de charges électriques dans des dispositifs très divers.

Les ondes électromagnétiques couvrent un très large spectre de fréquence. On distingue trois domaines principaux, le domaine des ondes radios (voir tableau ci-dessous), le domaine optique, allant de l'infra-rouge à l'UV, le domaine visible en constituant une sous partie pour des longueurs d'onde allant de 400 nm à 800 nm (et des fréquences de l'ordre de  $10^{14}$  Hz).

Pour des fréquences encore plus élevées on parle de rayonnements ionisants (X, et  $\gamma$ ).

On peut associer à toute onde électromagnétique de fréquences  $\nu$  des photons d'énergie

$$E = h\nu$$

avec  $h = 6,62 \cdot 10^{-34}$  J.s la constante de Planck.

Bandes	Fréquences	Longueurs d'ondes	Application
SLF Super Low Frequency	30 Hz à 300 Hz	$10^3$ km à $10^4$ km	Ondes des lignes électriques EDF, induction industrielle
MF Medium Frequency	300 kHz à 3 MHz	100 m à 1 km	Radionavigation, ADSL, radioamateur
HF Hight Frequency	3 MHz à 30 MHz	10 m à 100 m	Radiodiffusion
VHF Very Hight Frequency	30 MHz à 300 MHz	1 m à 10 m	Radiodiffusion, télédiffusion, satellites météo.
UHF Ultra Hight Frequency	300 MHz à 30 GHz	1 cm à 1 m	Télédiffusion et radiodiffusion numériques, liaisons satellites, téléphonie mobile, Wi-Fi, Bluetooth, radar, fours à micro-ondes.
EHF utilisé Extremly Hight Frequency	30 GHz à 300 GHz	1 mm à 1 cm	Faisceau hertzien terrestre et satellite

Tableau des radiofréquences

<b>Propagation des ondes électromagnétiques</b>	
Propagation des ondes électromagnétiques dans le vide	Énoncer les équations de Maxwell dans le vide. Interpréter qualitativement le lien entre l'équation de Maxwell-Faraday et la loi de Faraday. Établir l'équation de propagation des champs dans le vide.
Équation locale de Poynting	Décrire un bilan d'énergie électromagnétique dans le cas du vide et définir le vecteur de Poynting. Citer des ordres de grandeur de flux énergétiques moyens (Laser, flux solaire, etc.) Utiliser le flux du vecteur de Poynting à travers une surface orientée pour évaluer la puissance rayonnée.
Onde plane, onde plane progressive, onde plane progressive harmonique.	Définir une onde plane, une onde plane progressive et une onde plane progressive harmonique. Expliquer la pertinence et les limites de ces modèles.
Onde plane progressive monochromatique polarisée rectilignement.	Décrire la structure d'une onde plane progressive harmonique monochromatique polarisée rectilignement. Expliquer la pertinence de ce modèle. Décrire la propagation de l'énergie des ondes planes progressives harmoniques polarisées rectilignement. <b>Mettre en œuvre un protocole expérimental illustrant la polarisation rectiligne d'une onde électromagnétique.</b>
Spectre des ondes électromagnétiques	Citer les domaines du spectre des ondes électromagnétiques et leur associer des applications.