

EM 2 Potentiel électrostatique. Conducteur à l'équilibre électrostatique.

I. Circulation du champ électrique

I.1. Circulation du champ électrique créé par une charge ponctuelle

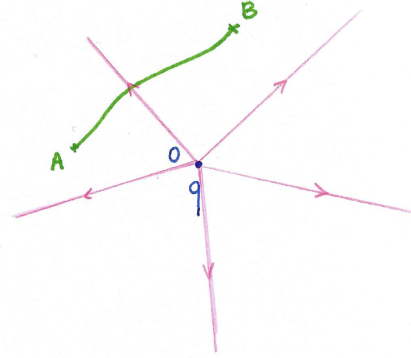
On considère une charge q placée en O . Elle crée en un point M quelconque un champ électrostatique :

$$\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r \quad \text{en coordonnées sphériques}$$

On définit la circulation du champ électrique d'un point A à un point B le long de la ligne C par

$$C_{AB} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

avec $d\vec{\ell}$ un déplacement élémentaire tangent à la courbe.



Le déplacement élémentaire en coordonnées sphériques vaut $d\vec{\ell} = d\vec{OM} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + r \sin \theta d\varphi \vec{u}_\varphi$

$$\vec{E} \cdot d\vec{OM} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r \cdot (dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + r \sin \theta d\varphi \vec{u}_\varphi)$$

$$\vec{E} \cdot d\vec{OM} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr$$

$$\begin{aligned} C_{AB} &= \int_A^B \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_A^B \frac{dr}{r^2} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{r} \right]_{r_A}^{r_B} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right) \end{aligned}$$

On en conclut que la circulation du champ électrostatique créé par une charge ponctuelle ne dépend que des positions initiale et finale (A et B) et pas de la courbe joignant ces deux points. Le champ \vec{E} est dit à **circulation conservative**. Avec le principe de superposition, cette propriété est généralisable au champ créé par un ensemble de charges ponctuelles.

I.2. Travail de la force électrique : potentiel électrostatique

Calculons le travail de la force électrique s'appliquant sur une charge q placée dans un champ électrostatique $\vec{E}(M)$. Elle subit une force $\vec{F} = q\vec{E}$. Le travail de cette force d'un point A à un point B a pour expression

$$W_{A \rightarrow B} = \int_A^B q\vec{E} \cdot d\vec{\ell} = q C_{AB}$$

ce travail est indépendant du chemin suivi : la force électrostatique est conservative. On peut écrire qu'elle dérive d'une énergie potentielle E_p telle que

$$\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{OM} = -dE_p$$

$$q\vec{E} \cdot d\vec{OM} = -\vec{\text{grad}} E_p \cdot d\vec{OM}$$

d'où

$$q\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} E_p$$

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} \frac{E_p}{q}$$

On a vu en mécanique que l'énergie potentielle d'une charge q placée dans un champ électrostatique \vec{E} valait

$$E_p = qV$$

où V représentait le potentiel électrostatique au point M . On a donc

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$$

Remarque :

- Le potentiel électrostatique est défini à une constante additive près.
- L'unité du potentiel électrostatique est le volt (V).
- On retrouve bien qu'en unité SI le champ électrique s'exprime en $\text{V}\cdot\text{m}^{-1}$

I.3. Équation de Maxwell-Faraday de la statique : potentiel électrostatique

La théorie électromagnétique s'appuie sur quatre équations de base : les équations de Maxwell. Nous avons déjà rencontré dans le chapitre précédent l'équation de Maxwell-Gauss. Une autre est l'**équation de Maxwell-Faraday** :

équation de Maxwell-Faraday : $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

avec \vec{B} le champ magnétique (sur lequel nous reviendrons ultérieurement dans le cours).

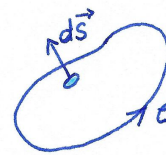
Si on considère uniquement des **champs indépendants du temps**, on en déduit l'**équation de Maxwell-Faraday de la statique** :

équation de Maxwell-Faraday de la statique : $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = \vec{0}$

On peut en déduire à l'aide du théorème de Stokes que la circulation de \vec{E} sur un contour fermé est nulle.

Théorème de Stokes : $\oint_{\mathcal{C}} \vec{A} \cdot d\vec{\ell} = \iint_{\mathcal{S}} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} \cdot d\vec{S}$

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \iint_{\mathcal{S}} \underbrace{\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}}_{=\vec{0}} \cdot d\vec{S} = 0$$

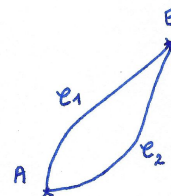


De manière équivalente, la circulation de \vec{E} sur une ligne AB est indépendante du chemin suivi :

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_{A\mathcal{C}_1}^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell} + \int_{B\mathcal{C}_2}^A \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$$

$$\int_{A\mathcal{C}_1}^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell} - \int_{A\mathcal{C}_2}^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$$

$$\int_{A\mathcal{C}_1}^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_{A\mathcal{C}_2}^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$



L'équation de Maxwell-Faraday de la statique traduit donc bien la propriété décrite au paragraphe I.1 :

Le champ **électrostatique** \vec{E} est à **circulation conservative**.

Mathématiquement

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = \vec{0} \iff \exists \varphi \text{ tel que } \vec{E} = \overrightarrow{\text{grad}} \varphi$$

Compte tenu des observations faites au I.2 on pose plutôt

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$$

Conséquence : le champ électrique \vec{E} est dirigé dans le sens des potentiels décroissants, perpendiculairement aux surfaces isopotentielles ($V = \text{cte}$).

On peut écrire de manière équivalente :

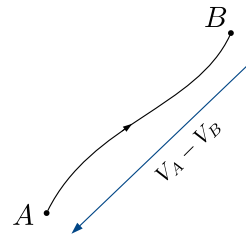
$$\vec{E} \cdot d\overrightarrow{OM} = -\overrightarrow{\text{grad}} V \cdot d\overrightarrow{OM}$$

$$\vec{E} \cdot d\overrightarrow{OM} = -dV$$

On en déduit

$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\overrightarrow{OM} = \int_A^B -dV \\ = V(A) - V(B)$$

$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = V(A) - V(B)$$



La circulation de \vec{E} sur une ligne AB est égale à la différence de potentiel entre la position de départ et la position d'arrivée.

Une charge ponctuelle q placée en un point où règne un champ \vec{E} dérivant d'un potentiel électrostatique V possède une énergie potentielle

$$E_p = qV$$

Expression de $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$ dans quelques géométries simples :

- Géométrie 1D axiale : $V = V(x)$

$$\vec{E}(x) = -\frac{dV}{dx} \vec{u}_x$$

- Géométrie 1D radiale cylindrique $V = V(r)$

$$\vec{E}(r) = -\frac{dV}{dr} \vec{u}_r$$

- Géométrie 1D radiale sphérique $V = V(r)$

$$\vec{E}(r) = -\frac{dV}{dr} \vec{u}_r$$

I.4. Potentiel créé par des distributions

Potentiel électrostatique associé à une charge ponctuelle q placée en O .

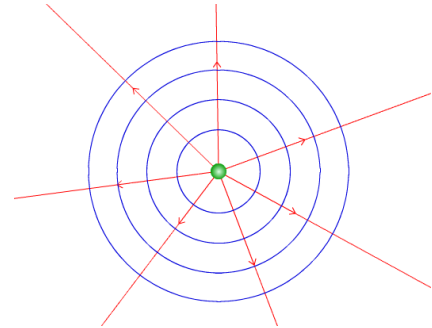
$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$$

$$\vec{E} \cdot d\vec{OM} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r \cdot (dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + r \sin\theta d\varphi \vec{u}_\varphi) = -dV$$

$$\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = -dV$$

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + cte$$

On choisit $\lim_{r \rightarrow \infty} V(r) = 0$ d'où $V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$.



Potentiel électrostatique créé par une charge ponctuelle en O :

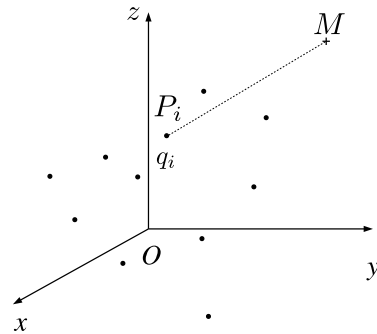
$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad V = 0 \text{ à l'infini}$$

Les surfaces isopotentielles sont des sphères de centre O .

On peut en déduire, d'après le théorème de superposition, le potentiel électrostatique d'une distribution de N charges ponctuelles :

$$V(M) = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 P_i M}$$

avec $V = 0$ à l'infini.



puis le potentiel électrostatique de distributions volumique, surfacique ou linéique de dimension finie ($V = 0$ à l'infini).

distribution volumique	distribution surfacique	distribution linéique
$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\rho(P)}{PM} d\tau_P$	$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{\sigma(P)}{PM} dS_P$	$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_C \frac{\lambda(P)}{PM} d\ell_P$

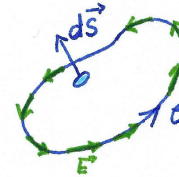
II. Topographie du champ électrique

II.1. Lignes de champ et surfaces isopotentielles

- Conséquence de la loi de Maxwell-Faraday de la statique : $\text{rot } \vec{E} = \vec{0}$:

Les lignes de champ électrostatique \vec{E} ne se referment pas sur elles-mêmes.

Supposons qu'une ligne de champ se referme sur elle-même (voir figure ci-contre). La circulation de \vec{E} serait strictement positive ce qui est en contradiction avec \vec{E} à circulation conservative (la circulation sur un contour fermé doit être nulle).



- Conséquence de $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$

Les lignes de champ sont perpendiculaires aux surfaces isopotentielles et orientées vers les valeurs du potentiel décroissantes.

- **Le potentiel électrostatique présente les mêmes propriétés de symétrie que les sources :**

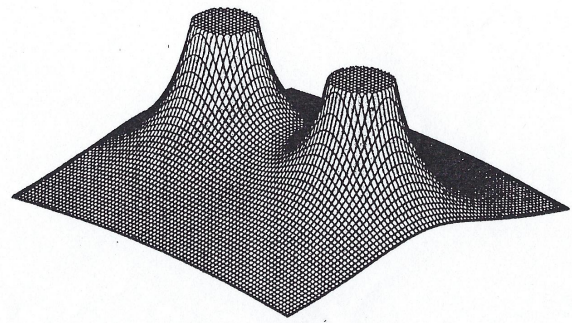
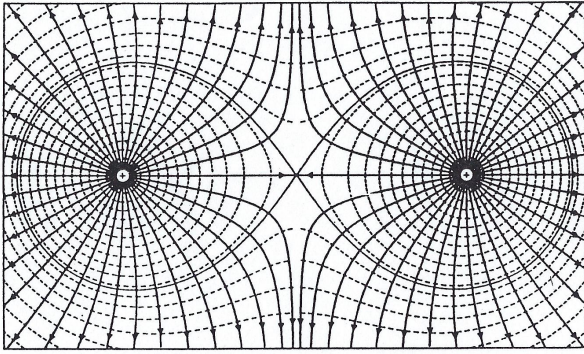
- Si la distribution de charge est invariante par translation le potentiel est invariant par cette même translation.
exemple : si invariance par translation quelconque parallèlement à Oz alors le potentiel est indépendant de z .
- Si la distribution de charge est invariante par rotation le potentiel est invariant par cette même rotation
exemple : si invariance par rotation quelconque autour de Oz alors le potentiel est indépendant de θ .
- Si la distribution de charge admet un plan de symétrie alors le potentiel est symétrique par rapport à ce plan. Si M' est le symétrique de M par rapport à ce plan alors :

$$V(M') = V(M)$$

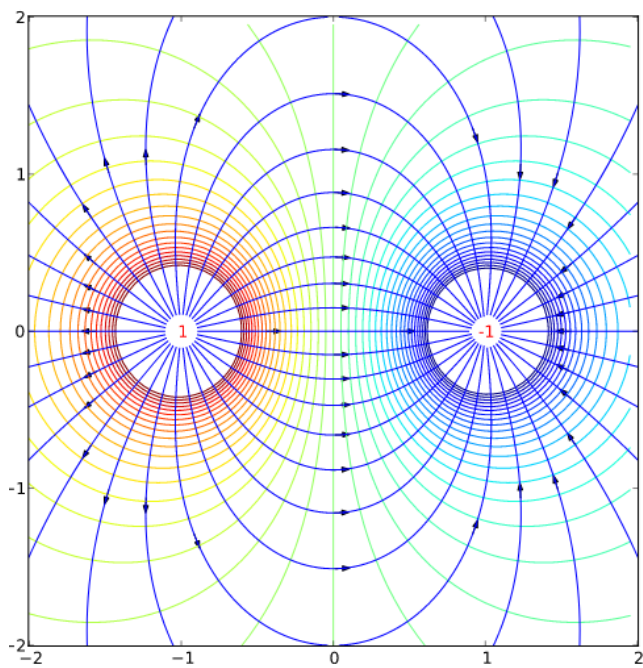
- Si la distribution de charge admet un plan d'antisymétrie alors le potentiel est antisymétrique par rapport à ce plan. Si M' est le symétrique de M par rapport à ce plan alors :

$$V(M') = -V(M)$$

II.2. Quelques exemples



À gauche : lignes de champ et isopotentielle créé par deux charges positives identiques.
À droite : représentation en relief de la fonction potentiel $V(x, y)$



Autres visualisations :

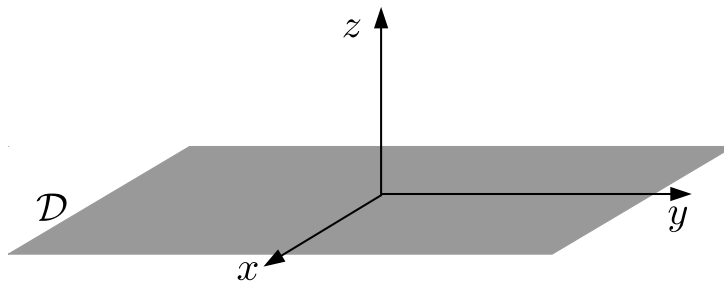
<http://ressources.univ-lemans.fr/AccesLibre/UM/Pedago/physique/02/electri/tripole.html>

<http://ressources.univ-lemans.fr/AccesLibre/UM/Pedago/physique/02/electri/dipole1.html>

III. Calculs du potentiel

III.1. Plan infini

On considère un plan infini portant une densité surfacique de charge σ uniforme.



On se place en coordonnées cartésiennes : $V(x, y, z)$.

La distribution est invariante par translation quelconque suivant \vec{u}_x et suivant \vec{u}_y . D'où

$$V = V(z)$$

La distribution est symétrique par rapport à son propre plan xOy . Le potentiel est donc symétrique par rapport à ce plan :

$$V(z) = V(-z)$$

Les surfaces isopotentielles sont des plans parallèles au plan xOy . Le champ \vec{E} est perpendiculaire à ces plans : il est donc parallèle à \vec{u}_z .

On a établi l'expression de \vec{E} dans le chapitre précédent :

$$\begin{cases} z > 0 & \vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_z \\ z < 0 & \vec{E} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_z \end{cases}$$

avec $\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V = -\frac{dV(z)}{dz} \vec{u}_z = E(z) \vec{u}_z$.

D'où pour $z > 0$:

$$\frac{dV(z)}{dz} = -E(z) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

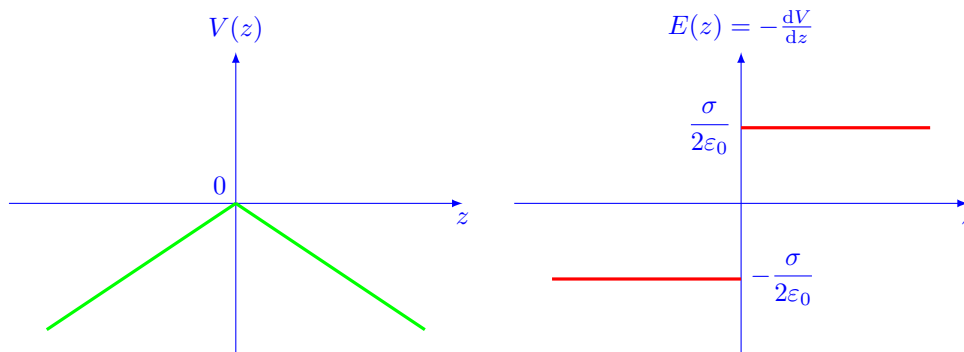
$$V(z) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} z + cte$$

La distribution n'étant pas de dimension finie, on ne peut pas choisir $V = 0$ à l'infini. On choisit $V = 0$ en $z = 0$ d'où $cte = 0$.

pour $z > 0$ $V(z) = -\frac{\sigma z}{2\epsilon_0}$

La fonction $V(z)$ étant paire on a

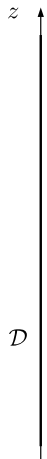
pour $z < 0$ $V(z) = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0}$



Remarque : Le potentiel V est continu à la traversée de la surface chargée ($z = 0$).

III.2. Fil infini

On considère la distribution de charge \mathcal{D} constituée d'un fil infini uniformément chargé avec une densité linéique de charge λ .



- coordonnées : cylindriques $V = V(r, \theta, z)$
- \mathcal{D} est invariante par translation quelconque // à \vec{u}_z
par rotation quelconque autour de Oz

d'où

$$V = V(r)$$

- les surfaces isopotentielles sont des cylindres d'axe Oz . Le champ \vec{E} est perpendiculaire à ces surfaces :
 $\Rightarrow \vec{E} // \vec{u}_r$

On a établi au chapitre précédent : $\vec{E} = E(r)\vec{u}_r = \frac{\lambda}{2\pi r\epsilon_0}\vec{u}_r$.

avec $\vec{E} = E(r)\vec{u}_r = -\overrightarrow{\text{grad}} V = -\frac{dV}{dr}\vec{u}_r$.

$$\frac{dV}{dr} = -E(r) = -\frac{\lambda}{2\pi r\epsilon_0}$$

$$V(r) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r + cte$$

La distribution étant de dimension infinie on ne peut pas choisir $V = 0$ à l'infini. On choisit par exemple $V(r_0) = 0$.

$$0 = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r_0 + cte$$

$$V(r) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r}{r_0}$$

Remarque : $V(r)$ n'est pas défini sur la distribution ($r = 0$).

III.3. Sphère uniformément chargée en volume

On considère une distribution de charge \mathcal{D} sphérique, de rayon R , uniformément chargée en volume avec une densité volumique de charge ρ . On note Q la charge totale de cette distribution. On a

$$Q = \rho \frac{4}{3} \pi R^3$$

- coordonnées : sphériques $V = V(r, \theta, \varphi)$
- \mathcal{D} est invariante par rotation quelconque autour tout diamètre (ρ est indépendant de θ et φ) d'où

$$V = V(r)$$

- les surfaces isopotentielles sont des sphères de centre O Le champ \vec{E} est perpendiculaire à ces surfaces :
 $\Rightarrow \vec{E} // \vec{u}_r$

On a établi au chapitre précédent :
$$\begin{cases} r \leq R & \vec{E} = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \vec{u}_r \\ r \geq R & \vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r \end{cases}$$

avec $\vec{E} = E(r)\vec{u}_r = -\text{grad} V = -\frac{dV}{dr}\vec{u}_r$.

La distribution de charge étant de dimension finie on peut choisir $V = 0$ à l'infini. On commence donc par évaluer le potentiel pour $r \geq R$.

- $r \geq R$

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dr} &= -E(r) = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = -\frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} \\ V(r) &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + cte = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r} + cte \end{aligned}$$

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r} \text{ avec } V = 0 \text{ à l}'\infty$$

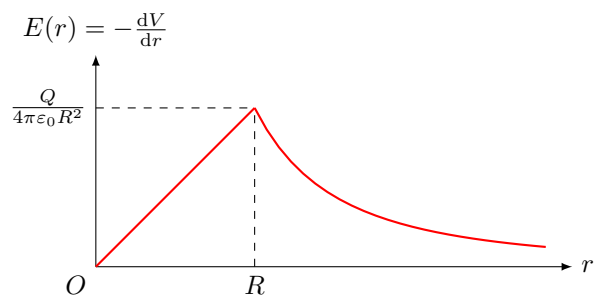
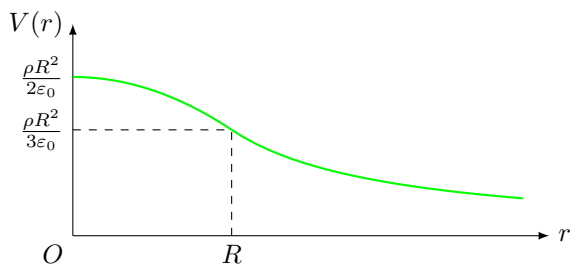
- $r \leq R$ $\frac{dV}{dr} = -E(r) = -\frac{\rho r}{3\epsilon_0}$

$$V(r) = -\frac{\rho r^2}{6\epsilon_0} + cte$$

$V(r)$ est continu en $r = R$

$$\begin{aligned} -\frac{\rho R^2}{6\epsilon_0} + cte &= \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 R} = \frac{\rho R^2}{3\epsilon_0} \\ cte &= \frac{\rho R^2}{3\epsilon_0} + \frac{\rho R^2}{6\epsilon_0} = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \end{aligned}$$

$$V(r) = -\frac{\rho r^2}{6\epsilon_0} + \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0}$$



III.4. Sphère uniformément chargée en surface

On considère une distribution de charge \mathcal{D} sphérique, de rayon R , uniformément chargée en surface avec une densité surfacique de charge σ . On note Q la charge totale de cette distribution.

- coordonnées : sphériques $V = V(r, \theta, \varphi)$
- \mathcal{D} est invariante par rotation quelconque autour tout diamètre.
d'où

$$V = V(r)$$

- les surfaces isopotentielles sont des sphères de centre O Le champ \vec{E} est perpendiculaire à ces surfaces :
 $\Rightarrow \vec{E} // \vec{u}_r$

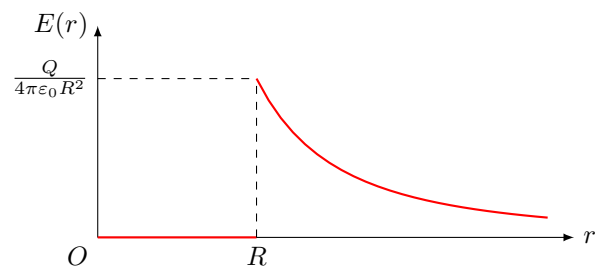
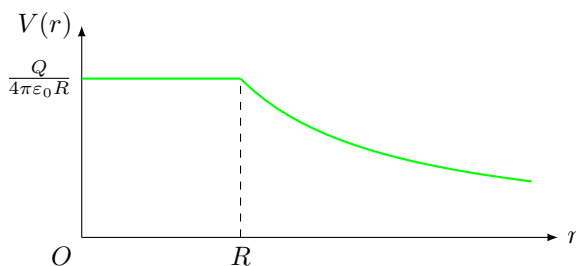
On a établi au chapitre précédent :
$$\begin{cases} r < R & \vec{E} = \vec{0} \\ r > R & \vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r \end{cases}$$

avec $\vec{E} = E(r)\vec{u}_r = -\vec{\text{grad}} V = -\frac{dV}{dr}\vec{u}_r$.

- $r > R$ $\frac{dV}{dr} = -E(r) = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$
 $V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$ (avec $V = 0$ à l' ∞)

Ce potentiel est le même que celui créé par une charge ponctuelle Q placée en O .

- $r \leq R$ $\frac{dV}{dr} = 0$
 $V(r) = cte = V(R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$ par continuité du potentiel en $r = R$



Bilan des continuités du potentiel :

Le potentiel est continu pour des distributions de charge volumiques et surfaciques. Il n'est pas défini sur les distributions linéiques de charges et sur les charges ponctuelles.

IV. Conducteur à l'équilibre

IV.1. Définitions

a) Conducteur

Un conducteur est un corps au sein duquel des charges dites **charges libres** sont susceptibles de se déplacer sous l'action d'une force, si petite soit-elle.

b) Équilibre électrostatique

Un conducteur est à l'équilibre électrostatique lorsque toutes les charges libres qu'il contient n'ont pas de mouvement d'ensemble.

La valeur moyenne des vitesses des porteurs de charges à l'échelle mésoscopique est nulle. Ces charges sont seulement animées d'un mouvement d'agitation thermique.

$$\vec{v} = \vec{0}$$

IV.2. Propriétés d'un conducteur à l'équilibre électrostatique

Une charge électrique est soumise, en présence d'un champ électrostatique à une force $\vec{F} = q\vec{E}$. Lorsque le conducteur est à l'équilibre électrostatique, les charges libres qu'il contient ne se déplacent pas : le champ électrostatique est donc nul à l'intérieur d'un conducteur à l'équilibre électrostatique.

Le champ électrostatique est nul à l'intérieur d'un conducteur à l'équilibre électrostatique.

$$\vec{E}^{\text{int}} = \vec{0}$$

Or $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$. On a donc dans le conducteur

$$\overrightarrow{\text{grad}} V = \vec{0}$$

D'où

$$V = cte$$

Un conducteur à l'équilibre électrostatique est un volume équipotentiel : le potentiel V est constant à l'intérieur et, par continuité, à la surface du conducteur.

$$V = cte$$

D'après la relation de Maxwell-Gauss : $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$. Le champ électrostatique étant nul dans tout le conducteur à l'équilibre, on a $\rho = 0$. Si le conducteur est chargé, les charges ne peuvent se répartir qu'à sa surface.

La densité volumique de charge est nulle à l'intérieur d'un conducteur à l'équilibre électrostatique. Les charges se répartissent à la surface du conducteur.

IV.3. Champ électrostatique à la surface d'un conducteur à l'équilibre électrostatique : théorème de Coulomb

La surface du conducteur est une surface équipotentielle. Le champ \vec{E} est perpendiculaire aux surfaces isopotentielle dont \vec{E} est perpendiculaire à la surface du conducteur.

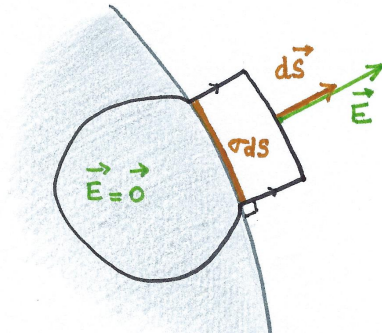
On applique le théorème de Gauss à travers une surface fermée représentée sur la figure constituée par un morceau de tube de champ à l'extérieur du conducteur, complétée par une surface quelconque à l'intérieur. On note dS la surface élémentaire du conducteur comprise à l'intérieur du volume et \vec{n} un vecteur unitaire orienté vers l'extérieur.

En utilisant le théorème de Gauss

$$\vec{E} \cdot d\vec{S} = E\vec{n} \cdot dS\vec{n} = E dS = \frac{\sigma dS}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}$$

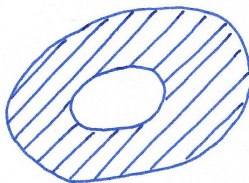


Ce résultat constitue le **théorème de Coulomb**.

On retrouve ainsi la discontinuité du champ \vec{E} à la traversée d'une surface chargée.

Théorème de Coulomb : à la surface d'un conducteur à l'équilibre électrostatique $\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}$

IV.4. Cavité dans un conducteur : cage de Faraday

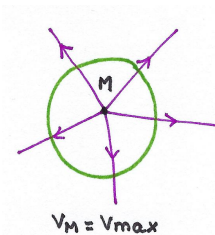


On considère une cavité vide de charge à l'intérieur d'un conducteur à l'équilibre électrostatique.

Le potentiel $V = cte$ sur toute la surface de la paroi intérieure. En l'absence de charge, cela implique que le potentiel V soit uniforme dans toute la cavité.

En effet, en l'absence de charge, le potentiel ne peut pas admettre d'extremum.

Supposons que le potentiel V admette une valeur maximale en un point M : dans ce cas des lignes de champ divergeraient de ce point vers des zones alentour de plus bas potentiel. Le flux de \vec{E} à travers une petite surface entourant ce point serait positif, ce qui, d'après le théorème de Gauss, traduirait la présence d'une charge positive en M ce qui est en contradiction avec l'hypothèse d'absence de charge.



On peut faire le même raisonnement avec une valeur de V minimale.

Si $V = cte$ dans la cavité alors \vec{E} est nul dans cette cavité, d'après le théorème de Coulomb, la densité surfacique de charge est nulle sur la paroi intérieure.

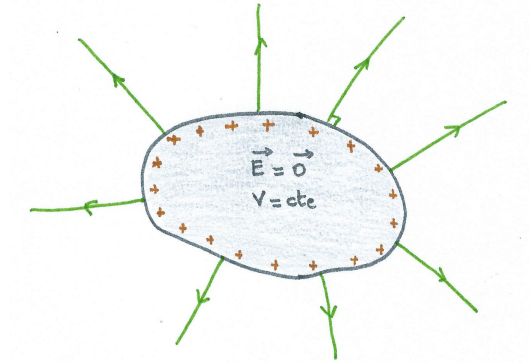
Le champ électrique est nul dans la cavité d'un conducteur à l'équilibre électrostatique. La densité surfacique de charge sur la paroi intérieure du conducteur est également nulle.

Les propriétés précédentes sont encore valables lorsque les limites de la cavité sont ajourées : c'est l'effet **cage de Faraday**.

<https://www.youtube.com/watch?v=cHhHi-lvHpk>

IV.5. Capacité d'un conducteur

On considère un conducteur seul dans l'espace. Il constitue un volume équipotentiel. Soit V le potentiel de ce conducteur. S'il est chargé alors sa charge se répartit à la surface. Soit Q la charge totale.



On peut montrer que la charge Q portée par le conducteur est proportionnelle au potentiel V (défini avec comme conditions aux limites $V = 0$ à l'infini)

$$Q = CV$$

C est appelée capacité du conducteur. Elle se mesure en farad (F).

Exemple : on a établi pour une sphère uniformément chargée en surface que le potentiel à la surface vaut

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

$$Q = 4\pi\epsilon_0 R V$$

La capacité d'un conducteur sphérique vaut donc $C = 4\pi\epsilon_0 R$.

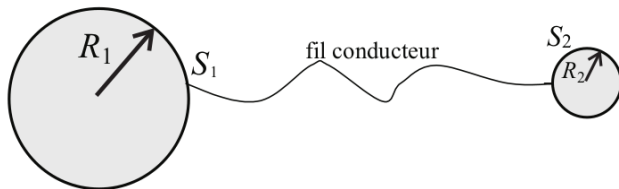
À V fixé, la charge augmente proportionnellement à R . La densité surfacique de charge associée varie donc en $1/R$.

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2} = \frac{4\pi\epsilon_0 R V}{4\pi R^2} = \frac{\epsilon_0 V}{R}$$

Conséquence : effet de pointe

On constate qu'à proximité d'une pointe, le champ électrostatique est toujours plus intense. D'après le théorème de Coulomb, cela signifie que la densité surfacique de charge est plus élevée au niveau des pointes.

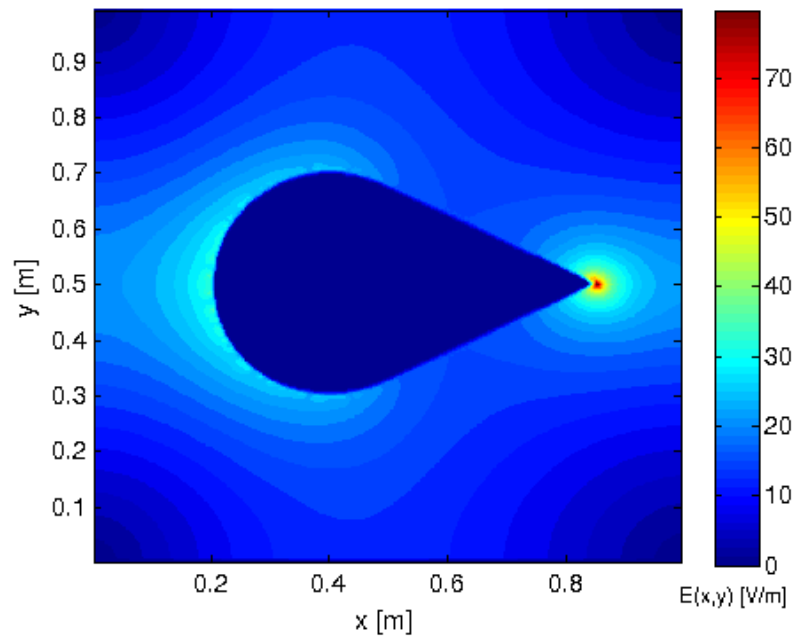
On modélise ce phénomène avec deux sphères chargées de rayons différents, reliées par un fil conducteur et placées loin l'une de l'autre. On peut donc considérer en première approximation que chaque sphère se comporte comme si elle était seule, mais les deux sphères partagent le même potentiel $V = V_1 = V_2$. On note σ_1 et σ_2 les densités surfaciques de charges portées respectivement par les sphère 1 et 2.



$$\sigma_1 = \frac{\epsilon_0}{R_1} V \quad \sigma_2 = \frac{\epsilon_0}{R_2} V$$

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{R_1}{R_2} \gg 1$$

$$\frac{\|\vec{E}_2\|}{\|\vec{E}_1\|} = \frac{R_1}{R_2} \gg 1$$



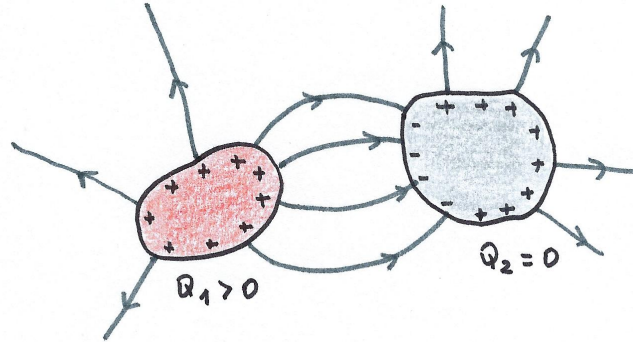
Calcul numérique 2D de l'intensité du champ électrique pour un profil de conducteur présentant une pointe

Feux de Saint Elme sur le pare-brise d'un A320 proche d'un cumulo-nimbus (site : Jérôme Robin).
<https://www.youtube.com/watch?v=D1KmLq5PWBg>

V. Condensateur

V.1. Conducteurs en influence

Considérons à présent deux conducteurs placés dans l'espace. Le premier est supposé chargé avec une charge $Q_1 > 0$ et le second est supposé globalement neutre. Si on rapproche les deux conducteurs, les charges surfaciques vont se déplacer, les charges négatives du conducteur 2 étant attirées par les charges positives du conducteur 1 : c'est le phénomène d'**influence électrostatique**.



Une partie des lignes de champ électrique quittent le conducteur 1 pour atteindre le conducteur 2.

V.2. Capacité d'un condensateur

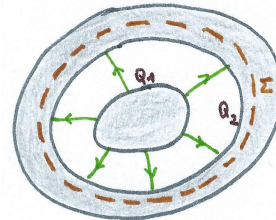
Un **condensateur** est constitué de deux conducteurs en influence totale : toute ligne de champ quittant l'un atteint l'autre. Ces deux conducteurs sont appelés les **armatures** du condensateur.

Cette condition est réalisée lorsque l'une des armatures est contenue dans l'autre.

Soit Q_1 la charge portée par l'armature 1 et Q_2 la charge portée par la face intérieure de l'armature 2. On déduit du théorème de Gauss, le champ étant nul à l'intérieur du conducteur :

$$\oiint_{\Sigma} \underbrace{\vec{E}(M)}_{= \vec{0}} \cdot d\vec{S} = 0 = Q_1 + Q_2$$

$$Q_1 = -Q_2$$



Les deux faces en regard des deux armatures d'un condensateur portent des charges opposées.

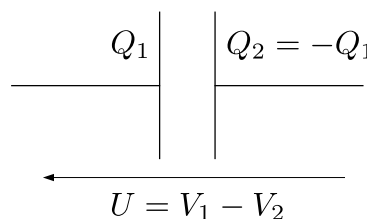
On note V_1 le potentiel électrostatique de l'armature 1 et V_2 celui de l'armature 2.

On définit la capacité du condensateur par la relation :

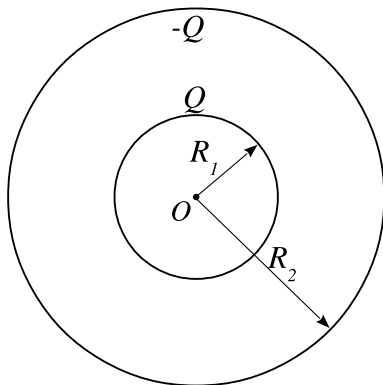
$$Q_1 = C(V_1 - V_2) \quad \text{avec} \quad V_1 - V_2 = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{OM}$$

C se mesure en farad (F).

Schématiquement :



V.3. Capacité d'un condensateur sphérique



On considère un condensateur constitué de deux armatures sphériques : l'armature intérieure de rayon R_1 porte une charge Q et l'armature extérieure de rayon R_2 porte la charge opposée $-Q$.

Les charges Q et $-Q$ sont supposées uniformément réparties.

On se place en coordonnées sphériques : $V = V(r, \theta, \varphi)$.

La distribution de charge est invariante par rotation autour de tout diamètre $\Rightarrow V$ est indépendant de θ et de φ .

$$V = V(r)$$

On calcule \vec{E} dans l'espace inter-armature.

$$\text{On a } \vec{E} = -\vec{\text{grad}} V = -\frac{dV}{dr}\vec{u}_r = E(r)\vec{u}_r$$

On retrouve un champ radial.

On choisit comme surface de Gauss une sphère de rayon r telle que $R_1 < r < R_2$ (elle est donc comprise entre les deux armatures). D'après le théorème de Gauss

$$\oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oiint_{\Sigma} E(r)\vec{u}_r \cdot dS\vec{u}_r = \oiint_{\Sigma} E(r)dS = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$E(r) \oiint_{\Sigma} dS = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$E(r)4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

On retrouve le champ électrostatique que créerait une charge ponctuelle Q placée en O .

$$\text{Or, } E(r) = -\frac{dV}{dr}. \text{ D'où } \frac{dV}{dr} = -E(r) = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \text{ On intègre :}$$

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + cte$$

$$V(R_1) - V(R_2) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \frac{Q}{C}$$

$$C = \frac{4\pi\epsilon_0}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}} = \frac{4\pi\epsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

Passage à la limite pour une faible épaisseur :

Supposons $R_2 \simeq R_1$. On pose $R_2 = R_1 + e$ avec $e \ll R_1$ l'épaisseur entre les deux armatures.

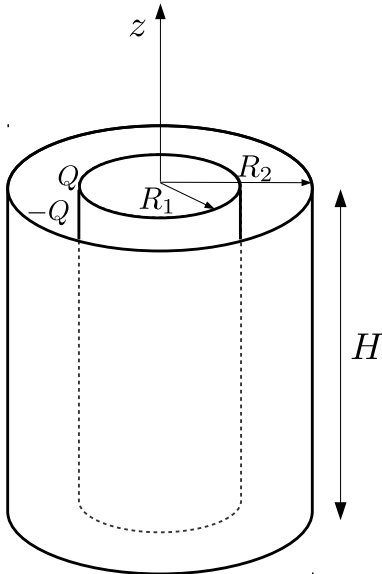
$$C = \frac{4\pi\epsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1} = \frac{4\pi\epsilon_0 R_1 (R_1 + e)}{e} \simeq \frac{4\pi\epsilon_0 R_1^2}{e}$$

avec $R_1 + e \simeq R_1$.

Commenter :

Remarque : pour calculer la différence de potentiel $V_1 - V_2$ on pouvait aussi calculer la circulation du champ électrique \vec{E} de l'armature 1 à l'armature 2.

V.4. Capacité d'un condensateur cylindrique



On considère un condensateur constitué de deux armatures cylindriques de hauteur H : l'armature intérieure de rayon R_1 porte une charge Q et l'armature extérieure de rayon R_2 porte la charge opposée $-Q$.

Les charges Q et $-Q$ sont supposées uniformément réparties

On suppose $H \gg R_2 - R_1$. On peut alors négliger les effets de bords et assimiler les cylindres à des cylindres infinis.

On se place en coordonnées cylindriques : $V = V(r, \theta, z)$

- il y a invariance par rotation quelconque autour de $Oz \Rightarrow V$ ne dépend pas de θ
- il y a invariance par translation quelconque suivant \vec{u}_z (si on assimile les cylindres à des cylindres infinis) $\Rightarrow V$ ne dépend pas de z

$$V = V(r)$$

On calcule \vec{E} dans l'espace inter-armature.

$$\text{On a } \vec{E} = -\vec{\text{grad}} V = -\frac{dV}{dr}\vec{u}_r = E(r)\vec{u}_r$$

On retrouve un champ radial.

On choisit comme surface de Gauss un cylindre d'axe Oz et de rayon r tel que $R_1 < r < R_2$ (il est donc compris entre les deux armatures). D'après le théorème de Gauss, en ne tenant compte que du flux latéral (le flux de \vec{E} à travers le "fond" et le "couvercle" de la surface cylindrique étant nul) :

$$\iint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{\Sigma} E(r)\vec{u}_r \cdot dS\vec{u}_r = \iint_{\Sigma} E(r) dS = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$E(r) \iint_{\Sigma} dS = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$E(r)2\pi rH = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$E(r) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 H r}$$

On trouve un expression analogue à celle d'un champ électrostatique créé par un fil infini uniformément chargé avec une densité linéique de charge $\lambda = Q/H$.

Or, $E(r) = -\frac{dV}{dr}$. D'où $\frac{dV}{dr} = -E(r) = -\frac{Q}{2\pi\epsilon_0 H r}$. On intègre :

$$V(r) = -\frac{Q}{2\pi\epsilon_0 H} \ln r + cte$$

$$V(R_1) - V(R_2) = -\frac{Q}{2\pi\epsilon_0 H} \ln R_1 + cte - \left(-\frac{Q}{2\pi\epsilon_0 H} \ln R_2 + cte \right)$$

$$V(R_1) - V(R_2) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 H} (\ln R_2 - \ln R_1)$$

$$V(R_1) - V(R_2) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 H} \ln \frac{R_2}{R_1} = \frac{Q}{C}$$

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 H}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$$

On peut définir une capacité linéique (capacité par unité de longueur d'unité F.m^{-1}).

$$\Gamma = \frac{C}{H} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$$

Passage à la limite pour une faible épaisseur :

On suppose $R_2 \simeq R_1$. On pose $R_2 = R_1 + e$ avec $e \ll R_1$ l'épaisseur entre les deux armatures.

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 H}{\ln \frac{R_1+e}{R_1}}$$

Or $\ln \frac{R_1+e}{R_1} = \ln \left(1 + \underbrace{\frac{e}{R_1}}_{\ll 1} \right) = \frac{e}{R_1}$ à l'ordre 1 en e/R_1 . D'où l'expression approchée de C :

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 H}{\frac{e}{R_1}} = \frac{\epsilon_0 2\pi R_1 H}{e}$$

Commenter :

Remarque : pour calculer la différence de potentiel $V_1 - V_2$ on pouvait aussi calculer la circulation du champ électrique \vec{E} de l'armature 1 à l'armature 2.

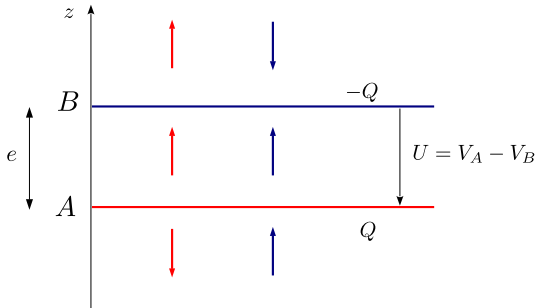
V.5. Capacité d'un condensateur plan

a) Calcul de la capacité

On considère un condensateur plan constitué de deux plaques conductrices planes parallèles, séparées par une distance e et portant des charges opposées Q et $-Q$ supposées uniformément réparties sur la surface. On pose

$$\sigma = \frac{Q}{S}$$

On néglige les effets de bord. Ceci est valable pour $e \ll \sqrt{S}$ où S est la surface d'une armature. On assimile les deux armatures à des plans infinis uniformément chargés.



	\vec{E}_A	\vec{E}_B	\vec{E}
$z < z_A$	$-\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\vec{u}_z$	$\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\vec{u}_z$	$\vec{0}$
$z_A < z < z_B$	$\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\vec{u}_z$	$\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\vec{u}_z$	$\frac{\sigma}{\epsilon_0}\vec{u}_z$
$z > z_B$	$\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\vec{u}_z$	$-\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\vec{u}_z$	$\vec{0}$

Le champ électrostatique est nul en dehors de l'espace inter-armature où il vaut

$$\vec{E} = E\vec{u}_z \text{ avec } E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

On souhaite calculer la capacité C de ce condensateur. On a, par définition, $Q = C(V_A - V_B)$

Méthode 1 :

$$V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{OM} = \int_A^B \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_z \cdot d\vec{OM}$$

$$V_A - V_B = \int_A^B \frac{\sigma}{\epsilon_0} dz$$

$$V_A - V_B = \frac{\sigma}{\epsilon_0} (z_B - z_A)$$

$$V_A - V_B = \frac{\sigma}{\epsilon_0} e = Ee$$

$$U = Ee$$

Or $\sigma = \frac{Q}{S}$ d'où ;

$$V_A - V_B = \frac{Q}{\epsilon_0 S} e$$

Méthode 2 :

$$\vec{E} = E\vec{u}_z = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_z = -\frac{dV}{dz} \vec{u}_z.$$

$$\frac{dV}{dz} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

D'où en intégrant

$$V(z) = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} z + cte$$

$$V(A) - V(B) = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} z_A + cte + \frac{\sigma}{\epsilon_0} z_B - cte$$

On peut alors calculer la différence de potentiel :

$$V(A) - V(B) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}(z_B - z_A) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}e = Ee \quad \text{On retrouve } \boxed{U = Ee}.$$

$$V_A - V_B = \frac{Q}{\epsilon_0 S}e$$

Dans les deux cas on a établi la relation

$$V_A - V_B = \frac{Q}{\epsilon_0 S}e$$

d'où

$$Q = \frac{\epsilon_0 S}{e}(V_A - V_B) = C(V_A - V_B)$$

d'où, en identifiant $C = \frac{\epsilon_0 S}{e}$

La capacité d'un condensateur plan dont les armatures, de surface S sont séparées par une épaisseur e dans le vide vaut

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{e}$$

▷ Vérifier l'homogénéité de la formule obtenue.

Remarque : L'ajout d'un matériau isolant entre les armatures multiplie la valeur de la capacité par un coefficient sans dimension ϵ_r , appelé permittivité électrique relative du matériau.

$$C = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{e}$$

La permittivité relative de l'air $\epsilon_r \simeq 1$

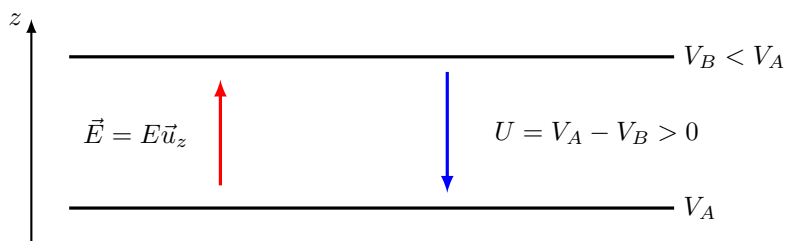
Exemple : estimer la capacité d'un condensateur constitué de deux feuilles carrées d'aluminium de 10 cm de côté séparées par une feuille de polypropylène d'épaisseur 0,1 mm et de permittivité relative $\epsilon_r = 2,2$.

Dans les deux cas on a établi la relation $V_A - V_B = Ee$. Retenir :

$$E = \frac{V_A - V_B}{e} = \frac{U}{e} \Leftrightarrow U = Ee$$

On vérifie $[E] = \frac{[U]}{[e]} = \frac{V}{m} = V.m^{-1}$

avec



Exemples :

$U = 100 \text{ V}; e = 1 \text{ cm}; E =$

$E = 100 \text{ V.m}^{-1}; e = 2,5 \text{ cm}; U =$

b) Énergie stockée dans un condensateur

Vous avez vu dans le cours d'électrocinétique que l'énergie stockée dans un condensateur avait pour expression

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}C \left(\frac{Q}{C}\right)^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

Soit, en utilisant la valeur de C calculée et la relation $U = eE$ établie précédemment :

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0 S}{e} (Ee)^2$$

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 S e$$

Se correspond au volume du condensateur.

On peut définir

$$e_m = \frac{\mathcal{E}}{Se} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2$$

e_m correspond à une densité volumique d'énergie électrique.

Retenir :

On peut associer à tout champ électrostatique \vec{E} la densité volumique d'énergie

$$e_m = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 \quad (\text{unité J.m}^{-3})$$

VI. Équations locales vérifiées par le potentiel électrostatique V

D'après l'équation de Maxwell-Gauss

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

or $\vec{E} = -\overrightarrow{\operatorname{grad}} V$ d'où

$$-\operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad}} V) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad}} V) = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

On note $\operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad}} V) = \Delta V$ l'opérateur laplacien scalaire de V . On a ainsi

$$\Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{équation de Poisson}$$

Dans le vide $\rho = 0$

$$\Delta V = 0 \quad \text{équation de Laplace}$$

En coordonnées cartésiennes :

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

Vérifier cette expression en coordonnées cartésiennes.

Électrostatique du vide	
Équation de Maxwell Faraday de la statique	Énoncer l'équation de Maxwell Faraday de la statique et justifier l'existence du potentiel électrostatique.
Conducteur en équilibre électrostatique	Énoncer les propriétés d'un conducteur en équilibre électrostatique. Énoncer le théorème de Coulomb et les relations de passage du champ électrostatique.
Le condensateur	Établir l'expression de la capacité d'un condensateur plan dans le vide en négligeant les effets de bords. Établir l'expression de la capacité linéique d'un condensateur cylindrique dans le vide en négligeant les effets de bords. Définir la notion de densité volumique d'énergie électrique à l'aide de l'exemple du condensateur plan.