

EM 1 b - Électrostatique : calcul du champ électrique

En électrostatique, les distributions de charges sont indépendantes du temps. Elles créent donc des champs électriques stationnaires appelés champs électrostatiques.

I. Effet d'une accumulation de charges : champ électrostatique

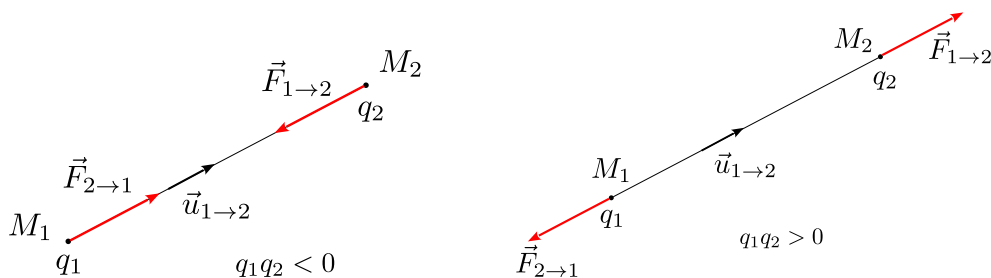
I.1. Loi de Coulomb

On considère deux charges ponctuelles q_1 et q_2 placées respectivement en M_1 et M_2 , au repos dans le référentiel d'étude. La force $\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$ qu'exerce M_1 sur M_2 a pour expression

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\vec{F}_{2 \rightarrow 1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{\|\vec{M}_1 M_2\|^2} \vec{u}_{1 \rightarrow 2}$$

avec ϵ_0 la permittivité électrique du vide $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$ et $\vec{u}_{1 \rightarrow 2}$ un vecteur unitaire dirigé de M_1 vers M_2 ($\vec{u}_{1 \rightarrow 2} = \frac{\vec{M}_1 M_2}{\|\vec{M}_1 M_2\|}$). On peut écrire, de manière équivalente :

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{\|\vec{M}_1 M_2\|^3} \vec{M}_1 M_2$$



Cette loi a été établie expérimentalement par Coulomb grâce à un dispositif de mesure de son invention, dite balance de Coulomb, capable de mesurer des forces très faibles.

<http://www.ampere.cnrs.fr/parcourspedagogique/zoom/video/coulomb/video/coulomb.php>

I.2. Champ électrique créé par une charge ponctuelle

Soit q une charge ponctuelle placée en P . Une charge q_M placée en M subira la force

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_M}{\|\vec{PM}\|^2} \vec{u}_{P \rightarrow M} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_M}{\|\vec{PM}\|^3} \vec{PM}$$

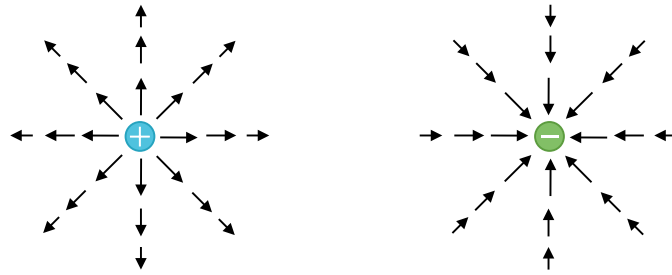
On peut écrire cette force sous la forme

$$\vec{F} = q_M E(\vec{M})$$

où $\vec{E}(M)$ est le champ électrique créé par la charge q au point M . On déduit de la loi de Coulomb

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\|\vec{PM}\|^2} \vec{u}_{P \rightarrow M} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\|\vec{PM}\|^3} \vec{PM}$$

Remarque : le champ \vec{E} n'est pas défini au niveau de la charge.



Champ électrostatique créé par des charges ponctuelles

I.3. Définition du champ électrostatique

Le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ en un point M est tel qu'une charge q placée en M subit une force :

$$\vec{F} = q\vec{E}(M)$$

L'unité SI du champ électrique est le $V.m^{-1}$.

- un ordre de grandeur à connaître : champ disruptif de l'air

Extrait de Wikipédia : "L'air est un isolant mais sous de fortes tensions, les électrons qui composent les atomes des molécules de l'air sont littéralement arrachés à leur orbite de valence pour participer à la conduction électrique : la foudre traverse alors l'atmosphère. La valeur du champ disruptif de l'air la plus communément admise est de 36 000 volts par cm."

Cette valeur dépend de la pression et du taux d'humidité de l'air. Elle diminue quand l'humidité de l'air augmente. On retiendra un ordre de grandeur de $3.10^6 V.m^{-1}$.

Exemple : foudre, arc électrique entre les caténaïres et les lignes électriques de trains.

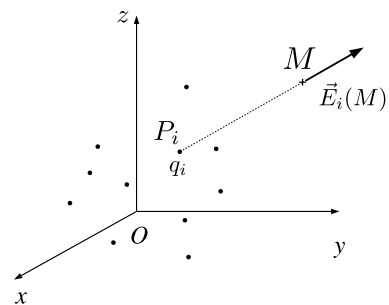
I.4. Champ électrique créé par des distributions

a) Théorème de superposition

Les lois fondamentales de l'électromagnétisme (équations de Maxwell) sont linéaires : l'additivité des charges entraîne l'additivité des champs.

Le champ créé en un point M par une distribution de N charges ponctuelles q_i placées aux points P_i est la somme des champs créés par chacune des charges.

$$\vec{E}(M) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{\|P_iM\|^3} \vec{P_iM}$$



D'où par extension

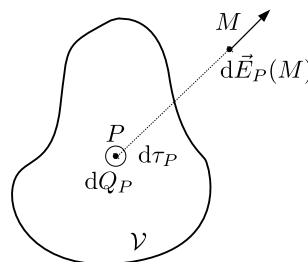
- pour une distribution volumique de charge :

Le champ élémentaire $d\vec{E}_P(M)$ créé par la charge dQ_P en M vaut

$$d\vec{E}_P(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dQ_P}{\|PM\|^3} \vec{PM} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho(P)d\tau_P}{\|PM\|^3} \vec{PM}$$

On en déduit le champ résultant par intégration :

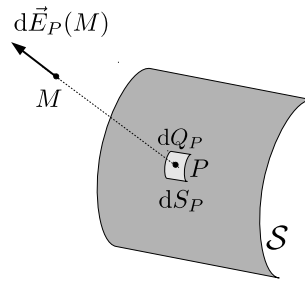
$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\rho(P)\vec{PM}}{\|PM\|^3} d\tau_P$$



- pour une distribution surfacique de charge :

$$d\vec{E}_P(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dQ_P}{\|\vec{PM}\|^3} \vec{PM} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma(P)dS_P}{\|\vec{PM}\|^3} \vec{PM}$$

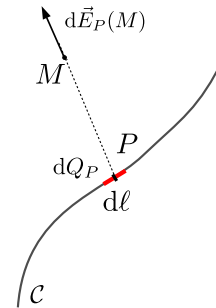
$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{\sigma(P)\vec{PM}}{\|\vec{PM}\|^3} dS_P$$



- pour une distribution linéique de charge :

$$d\vec{E}_P(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dQ_P}{\|\vec{PM}\|^3} \vec{PM} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda(P)d\ell_P}{\|\vec{PM}\|^3} \vec{PM}$$

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_C \frac{\lambda(P)\vec{PM}}{\|\vec{PM}\|^3} d\ell_P$$

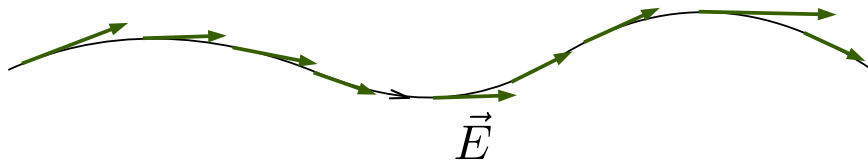


En pratique on n'utilise ces calculs que lorsqu'une autre méthode, basée sur le théorème de Gauss n'est pas applicable. Ces expressions sont également utilisées lors de la mise en œuvre de méthodes numériques de calcul.

II. Propriétés du champ électrostatique

II.1. Topographie du champ électrique

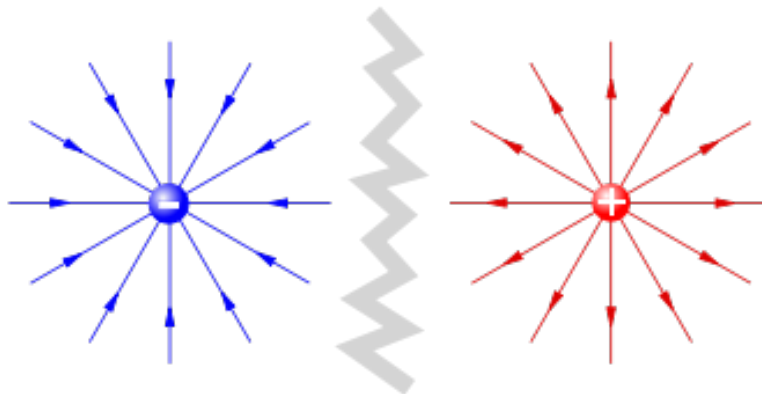
Une **ligne de champ** est une ligne en tout point tangente au champ électrique.



On oriente la ligne dans le sens du champ électrique. La norme du champ électrique peut varier le long d'un ligne de champ.

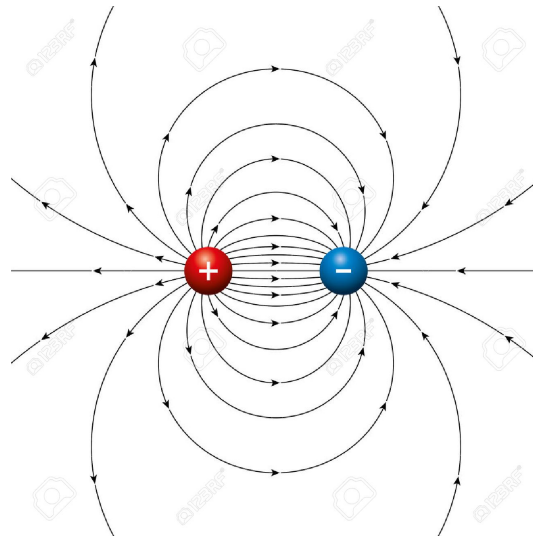
Deux lignes de champs ne peuvent se couper, sauf en des points où le champ électrique est nul.

Les lignes de champ divergent d'une charge positive et convergent vers une charge négative (le champ n'est pas défini au niveau de ces charges).



Champ créé par une charge négative

Champ créé par une charge positive



Champ créé par deux charges opposées

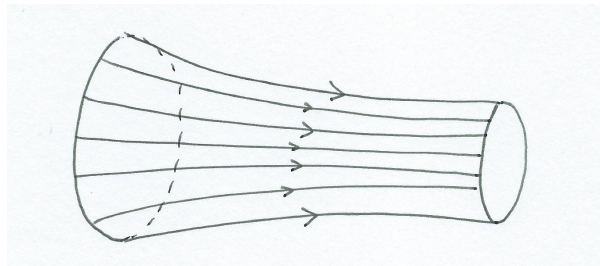
Pour visualiser des lignes de champ créées par des charges ponctuelles :

<https://www.f-legrand.fr/scidoc/simul/elecmag/chargesPonctuelles.html>

Pour une visualisation en 3D :

<https://www.youtube.com/watch?v=LB8Rhcb4eQM>

Un **tube de champ** est un ensemble de lignes de champ s'appuyant sur un contour fermé.



II.2. Principe de Curie

Énoncé :

« Lorsque certaines causes produisent certains effets, les éléments de symétrie des causes doivent se retrouver dans les effets produits ».

Nous allons voir que les propriétés de symétries des distributions de charges se retrouvent au niveau du champ électrostatique créé.

On considère l'expression générale du champ électrostatique dans les différents systèmes de coordonnées

$$\text{cartésiennes : } \vec{E}(M) = \vec{E}(x, y, z) = E_x(x, y, z)\vec{u}_x + E_y(x, y, z)\vec{u}_y + E_z(x, y, z)\vec{u}_z$$

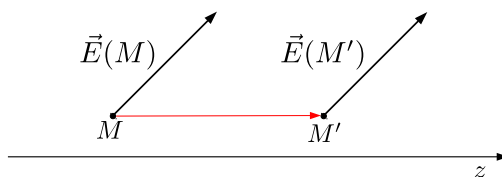
$$\text{cylindriques : } \vec{E}(M) = \vec{E}(r, \theta, z) = E_r(r, \theta, z)\vec{u}_r + E_\theta(r, \theta, z)\vec{u}_\theta + E_z(r, \theta, z)\vec{u}_z$$

$$\text{sphériques : } \vec{E}(M) = \vec{E}(r, \theta, \varphi) = E_r(r, \theta, \varphi)\vec{u}_r + E_\theta(r, \theta, \varphi)\vec{u}_\theta + E_\varphi(r, \theta, \varphi)\vec{u}_\varphi$$

L'étude des symétries de la distribution de charge va permettre la plupart du temps d'éliminer des variables ainsi que certaines composantes du champ électrostatique.

II.3. Invariance par translation

Supposons que la distribution soit invariante par translation quelconque suivant \vec{u}_z



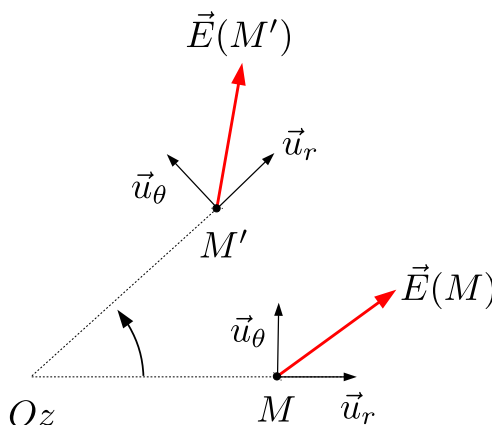
Conséquence : le champ \vec{E} ne dépend pas de la variable z . On aura

- en cartésiennes : $\vec{E}(M) = \vec{E}(x, y)$

- en cylindrique : $\vec{E}(M) = \vec{E}(r, \theta)$

II.4. Invariance par rotation

Si la distribution de charge est invariante par rotation quelconque autour d'un axe Oz alors le champ électrique est invariant par cette même rotation.



Conséquence : l'expression du champ \vec{E} ne dépend pas de θ . On aura en cylindrique : $\vec{E}(M) = \vec{E}(r, z)$

II.5. Symétrie plane

Si Π est plan de symétrie pour les charges alors il est aussi plan de symétrie pour le champ électrostatique. Soit M' le symétrique de M par rapport au plan Π : $M' = S_\pi(M)$. On a

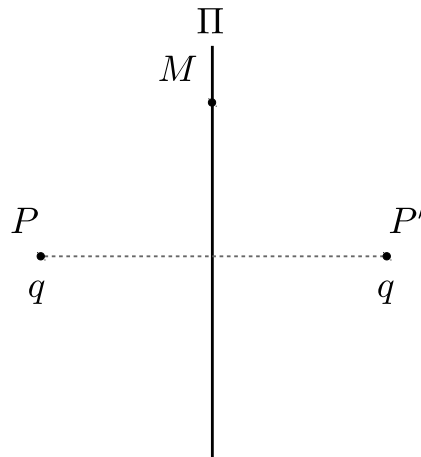
$$\vec{E}(M') = S_\pi[\vec{E}(M)]$$

- Cas où $M \in \Pi$
 Si $M \in \Pi$ alors $M' = S_\pi(M) = M$. D'où $\vec{E}(M') = \vec{E}(M) = S_\pi[\vec{E}(M)]$.
 Le champ $\vec{E}(M)$ doit être égal à son symétrique. D'où

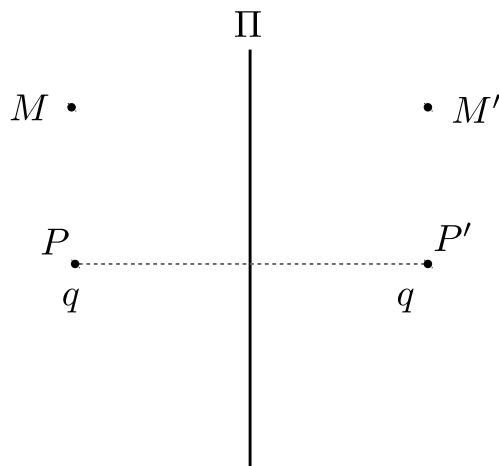
$$\vec{E}(M) \in \Pi$$

Si M appartient à un plan de symétrie pour les charges alors $\vec{E}(M)$ appartient à ce plan.

On peut le vérifier dans le cas simple suivant :



- Cas où $M \notin \Pi$



On vérifie que $\vec{E}(M') = S_{\pi}[\vec{E}(M)]$

II.6. Antisymétrie plane

Si Π^* est plan d'antisymétrie pour les charges alors il est aussi plan d'antisymétrie pour le champ électrostatique.

Soit M' le symétrique de M par rapport au plan Π^* : $M' = S_{\pi^*}(M)$. On a

$$\vec{E}(M') = -S_{\pi^*}[\vec{E}(M)]$$

- Cas où $M \in \Pi^*$

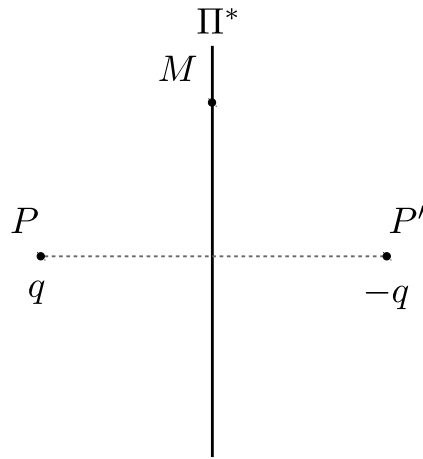
Si $M \in \Pi^*$ alors $M' = S_{\pi^*}(M) = M$. D'où $\vec{E}(M') = \vec{E}(M) = -S_{\pi^*}[\vec{E}(M)]$

Le champ $\vec{E}(M)$ est opposé à symétrique. D'où

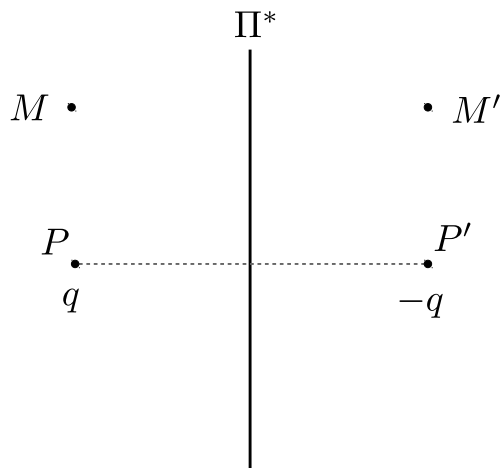
$$\vec{E}(M) \perp \Pi^*$$

Si M appartient à un plan d'antisymétrie pour les charges alors $\vec{E}(M)$ est perpendiculaire à ce plan.

On peut le vérifier dans le cas simple suivant :



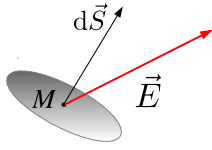
- Cas où $M \notin \Pi^*$



On vérifie que $\vec{E}(M') = -S_{\pi^*}[\vec{E}(M)]$

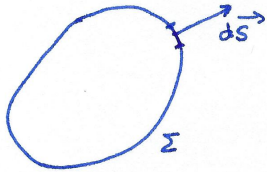
III. Théorème de Gauss

III.1. Flux du champ électrostatique à travers une surface fermée



On définit le flux élémentaire $d\phi$ du champ $\vec{E}(M)$ à travers la surface élémentaire orientée par le vecteur $d\vec{S}$ par

$$d\phi = \vec{E}(M) \cdot d\vec{S}$$



Le flux du champ électrostatique \vec{E} à travers une surface fermée Σ orientée vers l'extérieur vaut

$$\phi = \iint_{M \in \Sigma} \vec{E}(M) \cdot d\vec{S}$$

III.2. Flux du champ crée par une charge ponctuelle

Calculons le flux du champ électrique créé par une charge q placée en O à travers une sphère de centre O et de rayon r .

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\|\vec{OM}\|^3} \vec{OM} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\|\vec{OM}\|^2} \vec{u}_{P \rightarrow M}$$

Ce qui donne en coordonnées sphériques :

$$\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r = E(r) \vec{u}_r \text{ avec } E(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

$$\phi = \iint_{\Sigma} \vec{E}(M) \cdot d\vec{S}$$

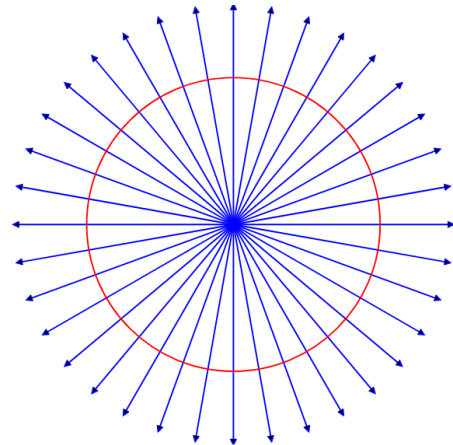
$$\phi = \iint_{\Sigma} E(r) \vec{u}_r \cdot dS \vec{u}_r$$

$$\phi = \iint_{\Sigma} E(r) dS$$

Or $E(r)$ est constant sur toute la sphère

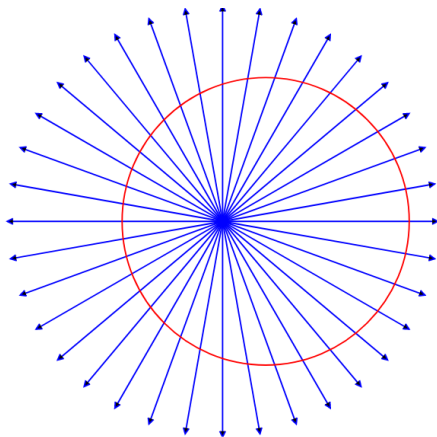
$$\phi = E(r) \iint_{\Sigma} dS$$

$$\phi = E(r) S = E(r) 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$$

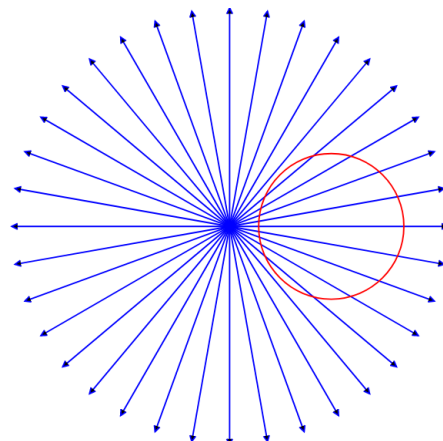


Ce résultat est en fait valable quelle que soit la position de la charge à l'intérieur du volume et quelle que soit la forme de la surface entourant la charge. Il est lié à la décroissance en $1/r^2$ du champ électrostatique.

Inversement le flux du champ créé par une charge ponctuelle placé à l'extérieur du volume est nul.



$$\phi = \frac{q}{\epsilon_0}$$

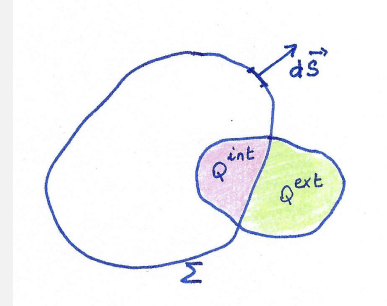


$$\phi = 0$$

III.3. Théorème de Gauss

Le flux du champ électrostatique à travers une surface fermée orientée vers l'extérieur est égal à la charge totale Q^{int} contenue à l'intérieur du volume divisé par ϵ_0 .

$$\oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q^{\text{int}}}{\epsilon_0}$$



Si $Q^{\text{int}} \neq 0$ alors le flux de \vec{E} à travers une surface fermée n'est pas nul, le champ \vec{E} n'est pas à flux conservatif.

III.4. Conséquence du théorème de Gauss : dans le vide le champ \vec{E} est à flux conservatif

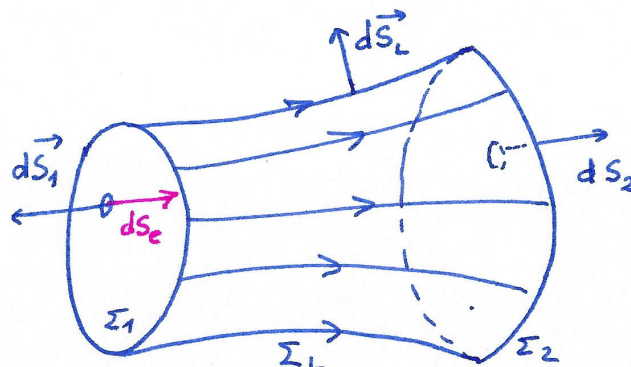
En l'absence de charge, $Q^{\text{int}} = 0$, d'où

$$\oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$$

⇒ dans le vide, le champ \vec{E} est à flux conservatif.

On considère un tube de champ ne contenant pas de charges.

On note Σ_1 la surface d'entrée, Σ_2 la surface de sortie et Σ_L la surface latérale. La surface totale $\Sigma_1 \cup \Sigma_L \cup \Sigma_2$ constitue une surface fermée que l'on oriente vers l'extérieur.



On peut définir

– le flux entrant ϕ_e de \vec{E} par la section Σ_1 :

$$\phi_e = \iint_{\Sigma_1} \vec{E} \cdot d\vec{S}_e = \iint_{\Sigma_1} \vec{E} \cdot (-d\vec{S}_1)$$

– le flux sortant ϕ_s de \vec{E} par la section Σ_2 :

$$\phi_s = \iint_{\Sigma_2} \vec{E} \cdot d\vec{S}_2$$

– le flux à travers la surface latérale, qui est nul par définition d'un tube de champ :

$$\phi_L = \iint_{\Sigma_L} \underbrace{\vec{E} \cdot d\vec{S}_L}_{=0} = 0 \quad \text{car } \vec{E} \perp d\vec{S}_L$$

En l'absence de charge ($Q^{\text{int}} = 0$), le flux de \vec{E} à travers la surface totale fermée **orientée vers l'extérieur** est nul :

$$\begin{aligned} \oiint_{\Sigma_1 \cup \Sigma_L \cup \Sigma_2} \vec{E} \cdot d\vec{S} &= 0 \\ \iint_{\Sigma_1} \vec{E} \cdot d\vec{S}_1 + \underbrace{\iint_{\Sigma_L} \vec{E} \cdot d\vec{S}_L + \iint_{\Sigma_2} \vec{E} \cdot d\vec{S}_2}_{=0} &= 0 \\ -\phi_e + \phi_s &= 0 \\ \phi_e &= \phi_s \end{aligned}$$

Conséquence :

Dans le vide quand les lignes de champ se rapprochent, l'intensité du champ électrostatique augmente. Inversement, lorsque les lignes de champ s'écartent les unes des autres, l'intensité du champ électrique diminue.

Question : que peut-on dire de $\text{div } \vec{E}$ dans le vide (donc en l'absence de charge) ?

III.5. Formulation locale du théorème de Gauss : relation de Maxwell Gauss

On rappelle le théorème d'Ostrogradski :

Soit $\vec{A}(M)$ un champ vectoriel. On a , pour toute surface fermée \mathcal{S} limitant le volume \mathcal{V} et orientée vers l'extérieur :

$$\oiint_{\mathcal{S}} \vec{A} \cdot d\vec{S} = \iiint_{\mathcal{V}} \text{div } \vec{A} \, dV$$

En déduire une formulation locale du théorème de Gauss.

$$\begin{aligned} \oiint_{\mathcal{S}} \vec{E} \cdot d\vec{S} &= \frac{Q^{\text{int}}}{\epsilon_0} \\ \iiint_{\mathcal{V}} \text{div } \vec{E} \, d\tau &= \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{\mathcal{V}} \rho \, d\tau \end{aligned}$$

Cette relation devant être vérifiée quel que soit le volume \mathcal{V} on en déduit

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Cette équation est une des quatre équations fondamentales de l'électromagnétisme, appelée équations de Maxwell-Gauss.

La formulation locale du théorème de Gauss correspond à l'**équation de Maxwell-Gauss**

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Dans le vide, il n'y a pas de charge $\rho = 0$. On retrouve bien $\text{div } \vec{E} = 0$

IV. Calcul du champ électrostatique

IV.1. Méthode

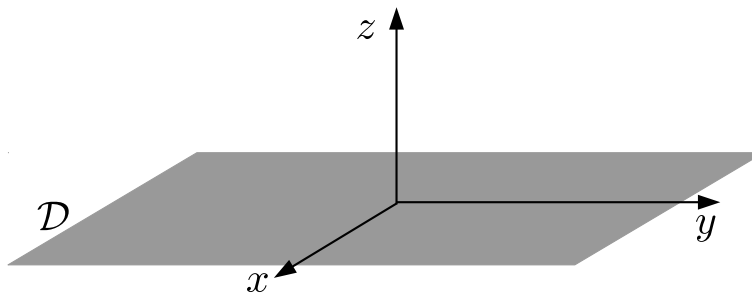
On souhaite calculer le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ en un point M quelconque.

Dans les cas où la distribution de charge présente des symétries particulières il est souvent possible de calculer $\vec{E}(M)$ à l'aide du théorème de Gauss, plutôt que d'utiliser les intégrales introduites au I.4.

- ▷ choisir un système de coordonnées adapté au problème.
- ▷ exploiter les invariances par translation (si distribution de dimension infinie) et par rotation pour éliminer des variables.
- ▷ exploiter les symétries ou les antisymétries de la distribution de charge pour éliminer des composantes du champ électrique et déterminer quand c'est possible sa direction.
- ▷ choisir une surface de Gauss adaptée passant par M , c'est-à-dire une surface pour laquelle le flux du champ \vec{E} est simple à calculer.

IV.2. Plan infini uniformément chargé

On considère la distribution de charge \mathcal{D} constitué d'un plan infini uniformément chargé avec une densité surfacique de charge σ .



▷ On se place en coordonnées cartésiennes : $\vec{E} = \vec{E}(x, y, z)$.

$$\vec{E} = E_x(x, y, z)\vec{u}_x + E_y(x, y, z)\vec{u}_y + E_z(x, y, z)\vec{u}_z$$

▷ La distribution de charge \mathcal{D} est invariante par translation quelconque suivant \vec{u}_x et suivant \vec{u}_y : le champ \vec{E} ne dépend que de z .

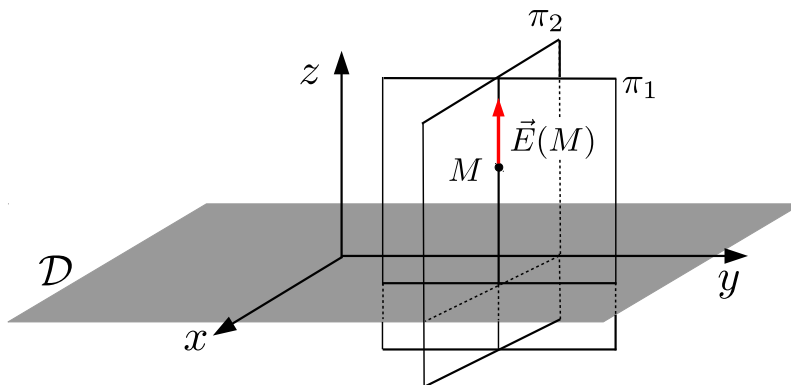
$$\vec{E} = \vec{E}(x, y, z) = E_x(z)\vec{u}_x + E_y(z)\vec{u}_y + E_z(z)\vec{u}_z$$

▷ Tout plan perpendiculaire au plan de la distribution est plan de symétrie pour la distribution de charge \mathcal{D} . Soit M un point quelconque. Tout plan contenant la droite (M, \vec{u}_z) est plan de symétrie. $\vec{E}(M)$ appartient à l'intersection de tous ces plans d'où :

$$\vec{E}(M) // \vec{u}_z$$

On a donc

$$\vec{E}(M) = E(z)\vec{u}_z$$



Remarque : On peut dire de manière équivalente :

Le plan $\pi_1 = (M, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ passant par M et parallèle au plan $(y0z)$ est plan de symétrie pour $\mathcal{D} : \vec{E}(M) \in \pi_1$ d'où

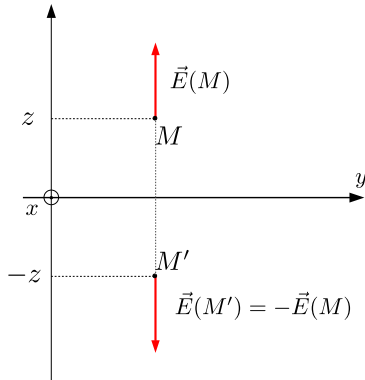
$$E_x = 0$$

Le plan $\pi_2 = (M, \vec{u}_x, \vec{u}_z)$ passant par M et parallèle au plan $(x0z)$ est plan de symétrie pour $\mathcal{D} : \vec{E}(M) \in \pi_2$ d'où

$$E_y = 0$$

Il reste à utiliser une dernière symétrie pour préciser la parité de la fonction $E(z)$.

▷ Le plan xOy est plan de symétrie pour \mathcal{D} dont pour \vec{E} .



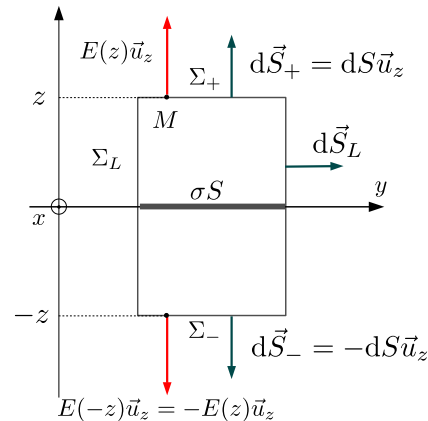
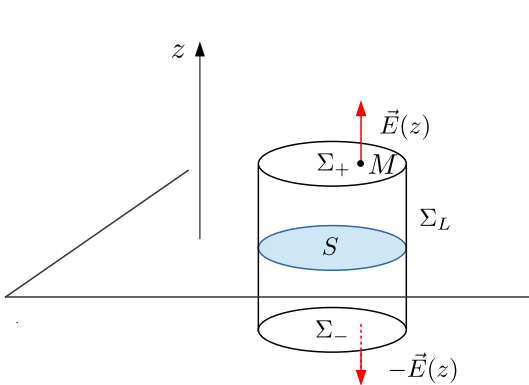
$$\vec{E}(M') = S_{xOy} [\vec{E}(M)] = -\vec{E}(M)$$

$$E(-z)\vec{u}_z = -E(z)\vec{u}_z$$

La fonction $E(z)$ est impaire.

Bilan : $\vec{E} = E(z)\vec{u}_z$ avec $E(z)$ impaire

On choisit comme surface de Gauss un cylindre de section S compris entre z et $-z$. On calcule $\vec{E}(M)$ pour $z > 0$.



Théorème de Gauss :

$$\oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q^{\text{int}}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma S}{\epsilon_0}$$

avec pour $z > 0$:

$$\begin{aligned} \oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} &= \iint_{\Sigma_+} \vec{E}(z) \cdot d\vec{S}_+ + \underbrace{\iint_{\Sigma_L} \vec{E} \cdot d\vec{S}_L}_{=0} + \iint_{\Sigma_-} \vec{E}(-z) \cdot d\vec{S}_- \\ &= \iint_{\Sigma_+} E(z)\vec{u}_z \cdot dS\vec{u}_z + \iint_{\Sigma_-} -E(z)\vec{u}_z \cdot (-dS)\vec{u}_z \\ &= \iint_{\Sigma_+} E(z)dS + \iint_{\Sigma_-} E(z)dS \\ &= 2E(z)S \end{aligned}$$

d'où, pour $z > 0$:

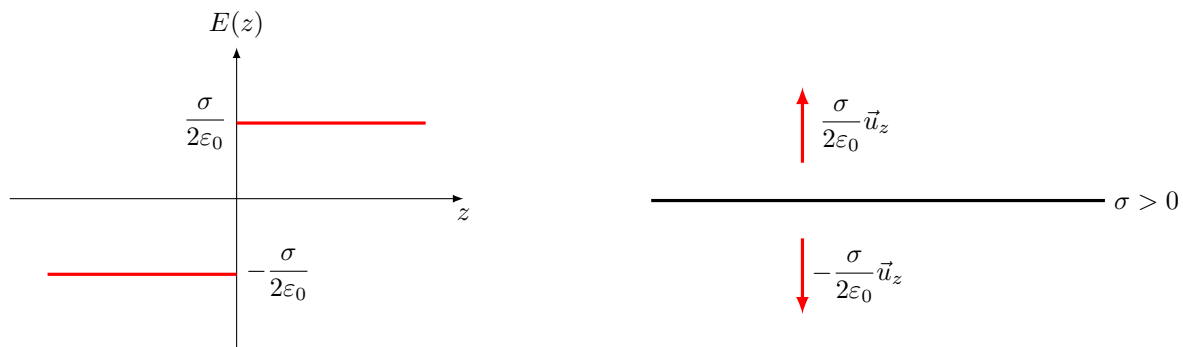
$$2E(z)S = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0}$$

$$E(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

On en déduit

pour $z > 0$ $\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{u}_z$

pour $z < 0$ $\vec{E} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{u}_z$



Le champ électrique \vec{E} n'est pas défini en $z = 0$, c'est-à-dire au niveau de la surface chargée. On a

$$\vec{E}(0^+) - \vec{E}(0^-) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{u}_z - \left(-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \right) \vec{u}_z = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{u}_z$$

IV.3. Fil infini uniformément chargé

On considère la distribution de charge \mathcal{D} constituée d'un fil infini uniformément chargé avec une densité linéique de charge λ .



- coordonnées : cylindriques $\vec{E} = \vec{E}(r, \theta, z)$

$$\vec{E} = \vec{E}(r, \theta, z) = E_r(r, \theta, z)\vec{u}_r + E_\theta(r, \theta, z)\vec{u}_\theta + E_z(r, \theta, z)\vec{u}_z$$

- \mathcal{D} est invariante par translation quelconque parallèlement à \vec{u}_z
 $\Rightarrow \vec{E}$ est indépendant de z
- \mathcal{D} est invariante par rotation quelconque autour de Oz
 $\Rightarrow \vec{E}$ est indépendant de θ

$$\vec{E} = \vec{E}(r) = E_r(r)\vec{u}_r + E_\theta(r)\vec{u}_\theta + E_z(r)\vec{u}_z$$

Plans de symétrie :

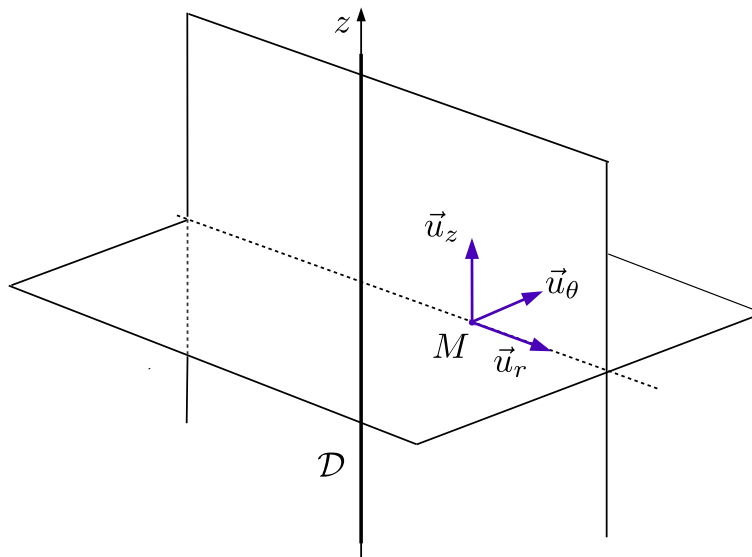
- Tout plan contenant l'axe Oz est plan de symétrie pour \mathcal{D} .
- Tout plan perpendiculaire à l'axe Oz est plan de symétrie pour \mathcal{D} .

Soit M un point quelconque.

- le plan $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ contenant l'axe Oz passant par M est plan de symétrie pour \mathcal{D} donc pour \vec{E}
 $\Rightarrow \vec{E}(M) \in (M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$

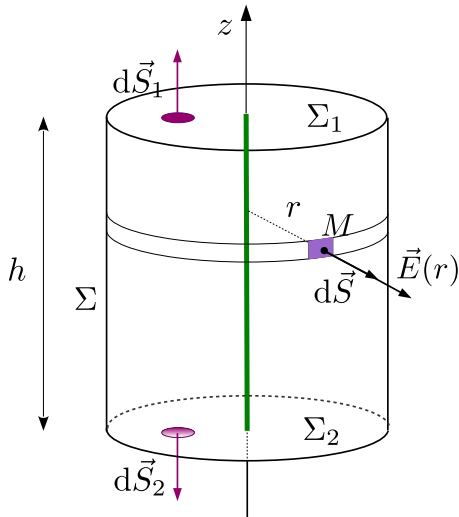
$$E_\theta = 0$$
- le plan $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ perpendiculaire à l'axe Oz passant par M est plan de symétrie pour \mathcal{D} donc pour \vec{E}
 $\Rightarrow \vec{E}(M) \in (M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$

$$E_z = 0$$



Bilan : $\vec{E} = E(r)\vec{u}_r$ Le champ \vec{E} est **radial**.

Surface de Gauss : cylindre d'axe Oz de hauteur h et de rayon r .



D'après le **théorème de Gauss** :

$$\phi = \iint_{\Sigma_1} \underbrace{\vec{E} \cdot d\vec{S}_1}_{=0} + \iint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \iint_{\Sigma_2} \underbrace{\vec{E} \cdot d\vec{S}_2}_{=0} = \frac{\lambda h}{\epsilon_0}$$

$$\phi = \iint_{\Sigma} E(r) \vec{u}_r \cdot dS \vec{u}_r = \iint_{\Sigma} E(r) dS = E(r) \iint_{\Sigma} dS = \frac{\lambda h}{\epsilon_0}$$

$$\phi = E(r)S = E(r)2\pi r h = \frac{\lambda h}{\epsilon_0}$$

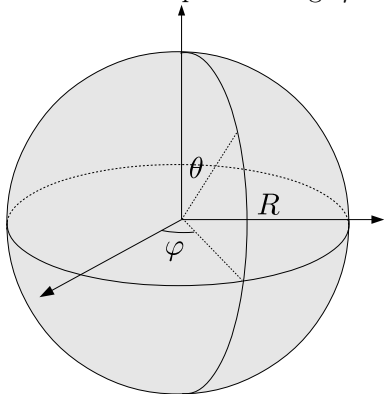
$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

$$\vec{E}(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{u}_r$$

Remarque : le champ \vec{E} n'est pas défini en $r = 0$ (ceci est lié au passage à la limite $s \rightarrow 0$ lorsqu'on passe d'une distribution volumique à une distribution surfacique).

IV.4. Sphère uniformément chargée en volume

On considère une distribution de charge \mathcal{D} sphérique, de rayon R , uniformément chargée en volume avec une densité volumique de charge ρ . On note Q la charge totale de cette distribution.



On a $\rho = cte$ d'où $Q = \rho \frac{4}{3} \pi R^3$

- coordonnées : sphériques $\vec{E} = \vec{E}(r, \theta, \varphi)$

$$\vec{E} = E_r(r, \theta, \varphi) \vec{u}_r + E_\theta(r, \theta, \varphi) \vec{u}_\theta + E_\varphi(r, \theta, \varphi) \vec{u}_\varphi$$

- \mathcal{D} est invariante par rotation autour de tout diamètre (ρ est indépendant de θ et φ) $\Rightarrow \vec{E}$ est indépendant de θ et φ .

$$\vec{E} = \vec{E}(r) = E_r(r) \vec{u}_r + E_\theta(r) \vec{u}_\theta + E_\varphi(r) \vec{u}_\varphi$$

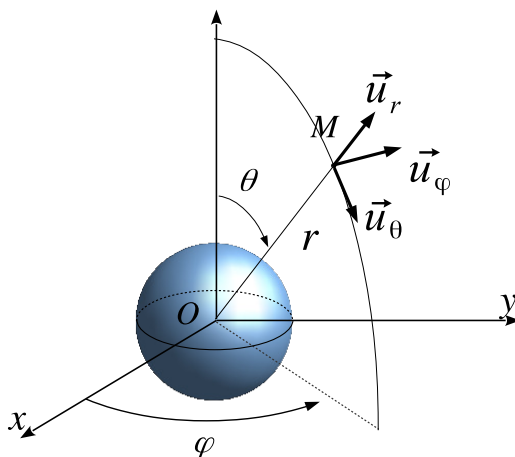
- Symétries : tout plan passant par O est plan de symétrie pour la distribution de charge \mathcal{D} .

▷ Méthode A : Soit M un point quelconque.

Tout plan contenant OM est plan de symétrie pour \mathcal{D}

$\Rightarrow \vec{E}(M)$ appartient à l'intersection de tous ces plans

$\Rightarrow \vec{E}(M) // \vec{OM} // \vec{u}_r$



▷ Méthode B : On peut écrire de manière équivalente :

- le plan $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ est plan de symétrie pour \mathcal{D} donc pour $\vec{E} \Rightarrow \vec{E}(M) \in (M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$

$$E_\varphi = 0$$

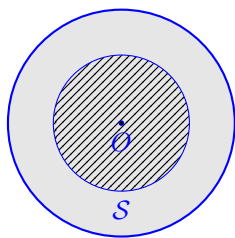
- le plan $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\varphi)$ est plan de symétrie pour \mathcal{D} donc pour $\vec{E} \Rightarrow \vec{E}(M) \in (M, \vec{u}_r, \vec{u}_\varphi)$

$$E_\theta = 0$$

- Surface de Gauss : sphère \mathcal{S} de centre O et de rayon r .

$$\phi = \iint_{\mathcal{S}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{\mathcal{S}} E(r) \vec{u}_r \cdot dS \vec{u}_r = \iint_{\mathcal{S}} E(r) dS = E(r) \iint_{\mathcal{S}} dS = E(r) 4\pi r^2$$

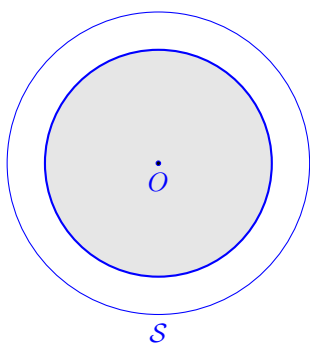
- Théorème de Gauss



$$r < R \quad E(r) 4\pi r^2 = \frac{Q(r)}{\epsilon_0} = \frac{\rho 4\pi r^3}{3\epsilon_0}$$

avec $Q(r) = \rho \frac{4}{3} \pi r^3$ la charge contenue à l'intérieur de la sphère de rayon $r < R$ (partie hachurée sur la figure).

$$E(r) = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}$$

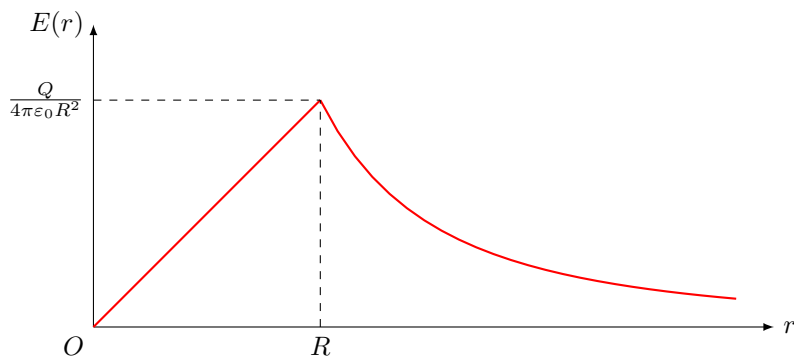


$$r \geq R \quad E(r) 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

avec $Q = \rho \frac{4}{3} \pi R^3$ la charge totale de la distribution.

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2}$$

Bilan $\left\{ \begin{array}{l} r < R \quad \vec{E}(r) = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \vec{u}_r = \frac{\rho \vec{OM}}{3\epsilon_0} \\ r \geq R \quad \vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r \end{array} \right.$



On vérifie que \vec{E} est continu en $r = R$: $\vec{E}(R^-) = \vec{E}(R^+) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \vec{u}_r$.

Pour $r \geq R$ tout se passe comme si on avait une charge ponctuelle Q égale à la charge totale de la distribution placée en O .

IV.5. Sphère uniformément chargée en surface

On considère une distribution de charge \mathcal{D} sphérique, de rayon R , uniformément chargée en surface avec une densité surfacique de charge σ . On note Q la charge totale de cette distribution.

La charge étant uniformément répartie, on a la relation :

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2} \iff Q = \sigma 4\pi R^2$$

Les symétries sont les mêmes que pour une sphère uniformément chargée en volume : $\vec{E} = E(r)\vec{u}_r$.

On choisit les mêmes surfaces de Gauss, à savoir des sphères de centre O et de rayon r .

D'après le théorème de Gauss :

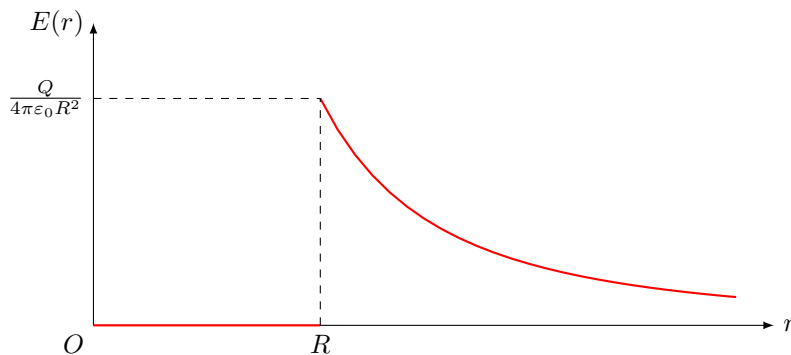
$$\text{pour } r < R \quad E(r)4\pi r^2 = 0$$

$$\text{pour } r > R \quad E(r)4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$\mathbf{Bilan} \quad \begin{cases} r < R & \vec{E}(r) = \vec{0} \\ r > R & \vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \vec{u}_r = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r^2} \vec{u}_r \end{cases}$$

Le champ électrostatique n'est pas défini sur la distribution surfacique (en $r = R$). On calcule la discontinuité du champ électrostatique :

$$\vec{E}(R^+) - \vec{E}(R^-) = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 R^2} \vec{u}_r - \vec{0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{u}_r$$



Pour $r > R$ tout se passe comme si on avait une charge ponctuelle Q égale à la charge totale de la distribution placée en O .

IV.6. Relation de passage

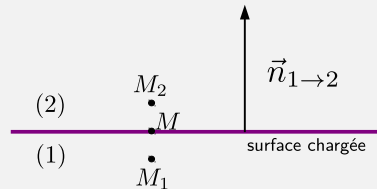
Il y a continuité du champ électrique lorsque la distribution de charge est volumique (voir champ électrostatique créé par une sphère uniformément chargée).

Une densité surfacique de charge est une modélisation d'une distribution volumique de charge d'épaisseur nulle. Ce passage à la limite entraîne une discontinuité du champ électrique au niveau de la surface chargée. Les relations trouvées pour le plan infini uniformément chargé et la sphère infinie uniformément chargée sont en fait généralisables à toute surface chargée.

Soit \vec{E}_1 le champ électrique en un point M_1 infiniment proche du point M de la surface, côté 1, et \vec{E}_2 le champ électrique en un point M_2 infiniment proche de M mais du côté 2. On a

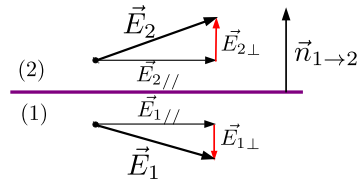
$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{1 \rightarrow 2}$$

avec σ la densité surfacique de charge au niveau du point M de la surface.



Remarque :

Si le champ électrique comporte une composante tangentielle, elle est continue. Seule la composante de \vec{E} normale au plan est discontinue.



IV.7. Analogie gravitationnelle

Interaction électrostatique	Interaction gravitationnelle
Champ électrique \vec{E}	Champ gravitationnel \vec{g}
$\vec{F} = q\vec{E}$	$\vec{F} = m\vec{g}$
Champ électrostatique créé en M par la charge Q_0 placée en O : $\vec{E}(M) = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$ en coordonnées sphériques.	Champ gravitationnel créé en M par la masse M_0 placée en O $\vec{g}(M) = -G \frac{M_0}{r^2} \vec{u}_r$ en coordonnées sphériques.

avec G la constante de gravitation universelle ($G = 6,67.10^{-11} \text{ m}^3.\text{kg}^{-1}.\text{s}^{-2}$).

$$\begin{array}{lcl}
 Q_0 & \longleftrightarrow & M_0 \\
 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} & \longleftrightarrow & -G \\
 \frac{1}{\epsilon_0} & \longleftrightarrow & -4\pi G
 \end{array}$$

On peut alors formuler le théorème de Gauss gravitationnel :

$$\oiint_{\Sigma} \vec{g} \cdot d\vec{S} = -4\pi GM^{int}$$

Le flux du champ gravitationnel à travers une surface fermée orientée vers l'extérieur est égal à la masse M^{int} contenue à l'intérieur du volume délimité par Σ , multipliée par $-4\pi G$.

On peut de même, exprimer localement le théorème de Gauss gravitationnel :

$$\text{div } \vec{g} = -4\pi G\rho$$

ρ représentant la densité volumique de masse (ou masse volumique) au point considéré.

Électrostatique du vide	
Description et effets électriques d'une accumulation de charges statiques	Définir et utiliser une fonction densité volumique, surfacique ou linéique de charges. Définir le champ électrostatique à l'aide de la force électrostatique ressentie par une charge ponctuelle d'essai placée dans le champ électrostatique d'une autre distribution. Citer quelques ordres de grandeurs de champs électriques. Énoncer le principe de Curie. Repérer les symétries et invariances d'une distribution. Définir la notion de ligne de champ électrostatique et prévoir la topographie des lignes de champ associées à une charge ponctuelle, un cylindrique infini, un plan infini uniformément chargés et une sphère chargée uniformément.
Équation de Maxwell-Gauss, théorème de Gauss	Énoncer l'expression du champ créé par une charge ponctuelle. Énoncer le théorème de Gauss et le relier à l'équation de Maxwell-Gauss. Utiliser le théorème de Gauss pour calculer un champ électrostatique créé par une distribution présentant un haut degré de symétrie (plan, cylindre, sphère).