EM 1a - Électrostatique : description d'une accumulation de charges

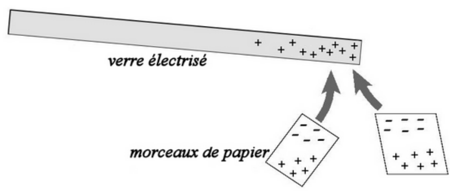
L'interaction électromagnétique est l'une des quatre interactions fondamentales. La charge électrique permet de quantifier cette interaction de même que la masse (grave) quantifie l'interaction gravitationnelle. Nous verrons d'ailleurs qu'il est possible de faire une analogie entre le champ électrique créé par une distribution de charges et le champ gravitationnel créé par une distribution de masse.

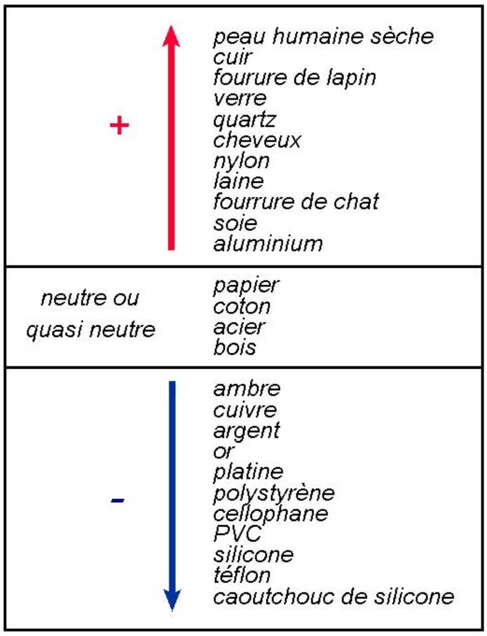
I. Charge électrique

I.1. Existence des charges électriques

Les expériences d'électrisation d'objets divers par frottement ont mis en évidence deux sortes de charges électriques : les charges électriques positives et les charges électriques négatives, selon la nature de l'objet frotté et de l'objet frottant. Les charges de même signe se repoussent et les charges de signes opposés s'attirent.

Si l'on frotte une tige de verre avec un tissu en laine et que l'on approche la tige de petits morceaux de papiers ces derniers sont attirés par la tige.





Pour plus de détails voir : https://www.maxicours.com/se/cours/experiences-simples-d-electrisation/

Autre expérience possible :

I.2. Propriétés de la charge électrique

L'unité SI de la charge électrique est le **coulomb** (symbole C).
Au niveau atomique les particules chargées sont les électrons (de charge $-e$) et les protons (de charge $+e$).

- La chargé électrique est **quantifiée** : toute charge est un multiple entier de la charge élémentaire e dont la valeur a été fixée par la dernière conférence du BIPM.

$$e = 1,602176634.10^{-19}\ \mathrm{C}$$

  On retiendra $e = 1,60.10^{-19}$ C.
- La charge électrique est une grandeur **conservative** : la charge d'un système isolé se conserve.

I.3. Conducteurs et isolants

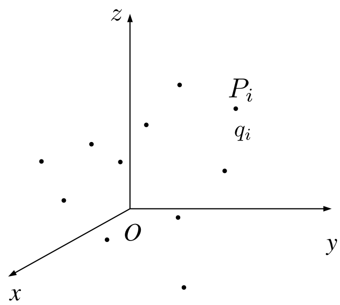
Dans un matériau **conducteur** des charges électriques (dites charges libres) peuvent circuler dans le matériau sous l'action d'une force si petite soit-elle : c'est le cas des électrons de conduction dans un métal.
Dans un matériau **isolant** les électrons restent liés aux atomes.

II. Modélisation des distributions de charges

II.1. Charge ponctuelle

Une particule élémentaire (proton, électron) possède une extension spatiale limitée et est considérée comme ponctuelle.

On peut définir une distribution de N charges ponctuelles q_i placées au points P_i.

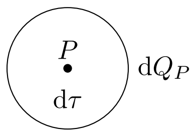


II.2. Densité volumique de charge

À l'échelle microscopique (c'est-à-dire à l'échelle atomique), la densité volumique de charge subit des variations spatiales très importantes : positive au niveau du noyau et négative au niveau du nuage électronique. De plus, les atomes (ou les ions) eux-mêmes sont en mouvement d'agitation thermique.
On se place donc à une échelle telle que l'on puisse s'affranchir de ces fluctuations : l'échelle **mésoscopique**.

Soit $\mathrm{d}\tau$ un volume mésoscopique entourant le point P :

- suffisamment petit pour être considéré comme ponctuel
- suffisamment grand pour pouvoir y définir une charge locale moyenne



Soit $\mathrm{d}Q_P$ la charge contenue dans $\mathrm{d}\tau$.

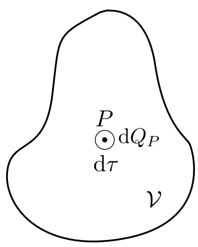
On définit $\rho(P)$ la **densité volumique de charge** au point P par :

$$\boxed{\rho(P) = \frac{\mathrm{d}Q_P}{\mathrm{d}\tau}}$$

Dimensionnellement : $[\rho] =$ $\mathrm{C.m^{-3}}$.

La charge totale contenue dans un volume $\mathcal{V}$ a pour expression

$$Q = \iiint_{\mathcal{V}} \rho(P)\mathrm{d}\tau$$

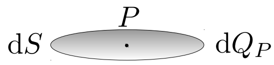


II.3. Densité surfacique de charge

Si on considère des charges réparties sur une feuille de papier aluminium, on est tenté de passer à une description surfacique de la distribution de charge.

Soit $\mathrm{d}S$ une surface élémentaire entourant le point P.

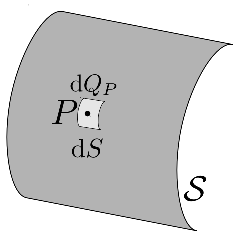
Soit $\mathrm{d}Q_P$ la charge portée par $\mathrm{d}S$.



On définit $\sigma(P)$ la **densité surfacique de charge** au point P par :

$$\boxed{\sigma(P) = \frac{\mathrm{d}Q_P}{\mathrm{d}S}}$$

Dimensionnellement : $[\sigma] = \mathrm{C.m^{-2}}$.

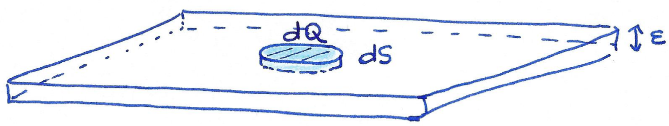


La charge totale contenue sur une surface $\mathcal{S}$ a pour expression

$$Q = \iint_{\mathcal{S}} \sigma(P)\mathrm{d}\mathcal{S}$$

Remarque : lien entre ρ et σ

Considérons un parallélépipède d'épaisseur ε présentant une densité volumique de charge ρ uniforme. Lorsque l'épaisseur ε tend vers 0 on peut choisir de modéliser la distribution de charge par un modèle surfacique.



On peut exprimer la charge $\mathrm{d}Q$ portée par la surface élémentaire $\mathrm{d}S$ de deux manières :

$$\mathrm{d}Q = \sigma\mathrm{d}S = \rho\varepsilon\mathrm{d}S$$

$$\sigma = \rho\varepsilon \quad \text{pour } \varepsilon \to 0$$

La modélisation surfacique correspond donc à un passage à la limite d'épaisseur nulle.

II.4. Densité linéique de charge

Si on considère à présent des charges réparties sur un fil de cuivre, on est tenté de passer à une description linéique de la distribution de charge.

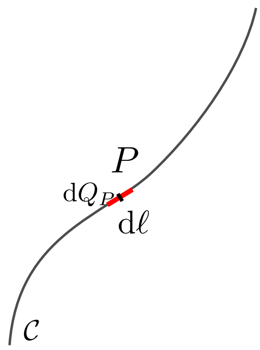
Soit $\mathrm{d}\ell$ une longueur élémentaire entourant le point P

Soit $\mathrm{d}Q_P$ la charge portée par $\mathrm{d}\ell$.

On définit $\lambda(P)$ la **densité linéique de charge** au point P par :

$$\lambda(P) = \frac{\mathrm{d}Q_P}{\mathrm{d}\ell}$$

Dimensionnellement : $[\lambda] = \mathrm{C.m^{-1}}$.



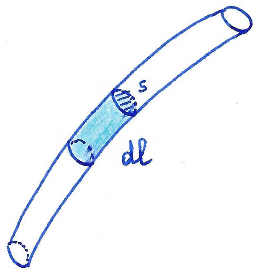
La charge totale Q portée par toute la distribution vaut :

$$Q = \int_{\mathcal{C}} \lambda(P)\mathrm{d}\ell$$

Remarque : lien entre ρ et λ

Considérons un fil de section s uniformément chargé en volume avec une densité volumique de charge ρ. Lorsque la section s du fil tend vers 0 on peut choisir de modéliser la distribution de charge par un modèle linéique.

On peut exprimer la charge dQ portée par une longueur élémentaire dℓ de fil de deux manières :



$$\mathrm{d}Q = \rho s \mathrm{d}S = \lambda \mathrm{d}\ell$$

$$\lambda = \rho s \text{ pour } s \to 0$$

La modélisation surfacique correspond donc à un passage à la limite de section nulle.

II.5. Rappels sur les éléments de surface et de volume dans les différents systèmes de coordonnées

- Rappels des déplacements élémentaires dans les trois systèmes de coordonnées.
- Expression des dS et dV usuels dans les différents systèmes de coordonnées.

Applications :

• Calcul du volume dV_c d'une couche sphérique de rayon r et d'épaisseur dr (résultat utile à connaître).

Le volume élémentaire en sphérique a pour expression $\mathrm{d}V = \mathrm{d}r\, r\mathrm{d}\theta\, r\sin\theta \mathrm{d}\varphi$. On somme tous les volumes élémentaires situés sur une surface sphérique de rayon r.

$$\mathrm{d}V_c = \int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi} \mathrm{d}r\, r\mathrm{d}\theta\, r\sin\theta \mathrm{d}\varphi$$

$$\mathrm{d}V_c = \int_{\theta=0}^{\pi} \sin\theta \mathrm{d}\theta \int_{\varphi=0}^{2\pi} \mathrm{d}\varphi\ r^2 \mathrm{d}r$$

$$\mathrm{d}V_c = [-\cos\theta]_{\theta=0}^{\pi} \times 2\pi \times r^2 \mathrm{d}r$$

$$\mathrm{d}V_c = \underbrace{(-\cos(\pi)+\cos 0)}_{=2} \times 2\pi \times r^2 \mathrm{d}r$$

$$\mathrm{d}V_c = 4\pi r^2 \mathrm{d}r$$

qui correspond au produit de la surface de la sphère de rayon, r par l'épaisseur de la couche sphérique dr.

• On considère une distribution volumique de charge sphérique, de rayon R et de densité volumique variable $\rho(r)$ donnée par l'expression suivante en coordonnées sphériques :

$$\rho(r) = \rho_0 \left(1 - k\frac{r^2}{R^2}\right)$$

avec ρ_0 et k deux constantes.

Calculer la charge totale de cette distribution.

Premier calcul :

$$Q = \iiint_{\text{sphère}} \rho(r) \mathrm{d}V$$

$$Q = \iiint_{\text{sphère}} \rho_0 \left(1 - k\frac{r^2}{R^2}\right) \mathrm{d}r\, r\mathrm{d}\theta\, r\sin\theta \mathrm{d}\varphi$$

$$Q = \rho_0 \int_0^R \left(1 - k\frac{r^2}{R^2}\right) r^2 \mathrm{d}r \int_{\theta=0}^{\pi} \sin\theta \mathrm{d}\theta \int_{\varphi=0}^{2\pi} \mathrm{d}\varphi$$

$$Q = \rho_0 \left[\frac{r^3}{3} - \frac{k}{R^2}\frac{r^5}{5}\right]_0^R \times [-\cos\theta]_{\theta=0}^{\pi} \times 2\pi$$

$$Q = \rho_0 \left(\frac{R^3}{3} - \frac{k}{R^2}\frac{R^5}{5}\right) \times \underbrace{(-\cos(\pi) + \cos 0)}_{=2} \times 2\pi$$

$$Q = 4\pi\rho_0 R^3 \left(\frac{1}{3} - \frac{k}{5}\right)$$

On peux aller plus vite en décomposant directement la sphère en couches sphériques élémentaires de rayon r, d'épaisseur $\mathrm{d}r$ et de volume $\mathrm{d}V_c = 4\pi r^2 \mathrm{d}r$ (cela revient à avoir déjà fait les intégrations en θ et φ).
On calcule alors :

$$Q = \int_0^R \rho(r) 4\pi r^2 \mathrm{d}r$$

$$Q = \int_0^R \rho_0 \left(1 - k\frac{r^2}{R^2}\right) 4\pi r^2 \mathrm{d}r$$

$$Q = 4\pi\rho_0 \int_0^R \left(1 - k\frac{r^2}{R^2}\right) r^2 \mathrm{d}r$$

$$Q = 4\pi\rho_0 \left[\frac{r^3}{3} - \frac{k}{R^2}\frac{r^5}{5}\right]_0^R$$

$$Q = 4\pi\rho_0 \left(\frac{R^3}{3} - \frac{k}{R^2}\frac{R^5}{5}\right)$$

$$Q = 4\pi\rho_0 R^3 \left(\frac{1}{3} - \frac{k}{5}\right)$$

Remarque :
Lorsque $k = 0$, on trouve $Q = \dfrac{4\pi R^3}{3}\rho_0$ qui correspond bien à la charge portée par une sphère de rayon R uniformément chargée avec une densité volumique de charge ρ_0.

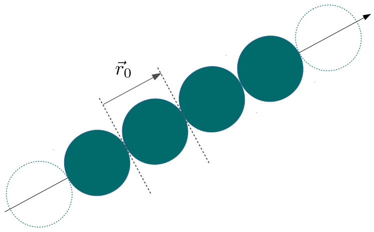
III. Invariances et symétries d'une distribution de charges

On considère les trois isométries de l'espace : translation, rotation, symétrie plane.

III.1. Invariance par translation

Soit M' l'image de M par la translation de vecteur $\vec{r}_0$

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{r}_0$$

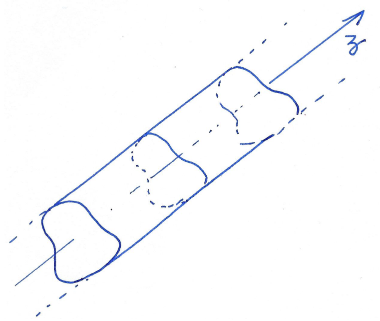


Une distribution est invariante par une translation de vecteur $\vec{r}_0$ si

$$\forall M \quad \rho(M') = \rho(M)$$

Cela implique que la distribution de charge est de dimension infinie dans la direction parallèle à $\vec{r}_0$.

Une telle invariance par translation peut se rencontrer dans des cristaux (ex : cristal de NaCl).

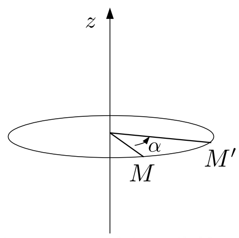


Si une distribution est invariante par translation **quelconque** suivant $\vec{u}_z$ alors la densité volumique de charge ρ est indépendante de z.

- en cartésiennes : $\rho = \rho(x, y)$
- en cylindriques : $\rho = \rho(r, \theta)$.

La distribution de charge est **de dimension infinie suivant $\vec{u}_z$**.

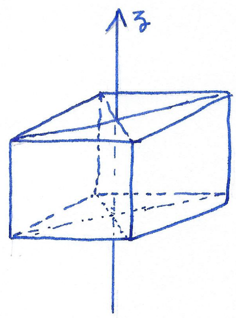
III.2. Invariance par rotation autour d'un axe



Soit M' l'image de M par rotation d'angle α autour de l'axe Oz.

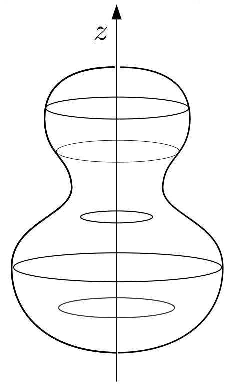
La distribution est invariante par rotation d'angle α autour de Oz si

$$\rho(M) = \rho(M')$$



Exemple :
On considère une distribution cubique de densité volumique de charge ρ homogène.

Cette distribution est invariante par rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ autour de Oz.

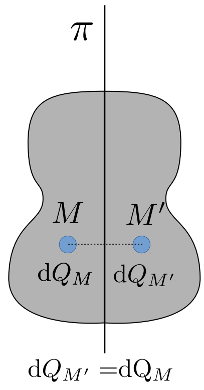


Lorsque la distribution est invariante par **rotation quelconque autour de Oz**, alors en coordonnées cylindriques, ρ est indépendante de l'angle θ

$$\rho(r, \theta, z) = \rho(r, z)$$

On dit que le système présente une symétrie de révolution autour de l'axe Oz.

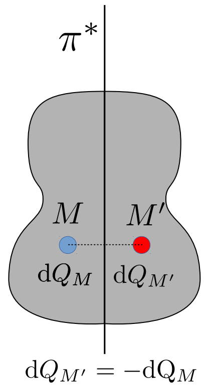
III.3. Symétrie d'une distribution de charge



Une distribution est **symétrique par rapport à un plan Π** si, M et M' étant deux point symétriques par rapport à Π, sa densité de charge vérifie :

$$\rho(M) = \rho(M')$$

III.4. Antisymétrie d'une distribution de charge



Une distribution est **antisymétrique par rapport à un plan Π*** si, M et M' étant deux points symétriques par rapport à Π, sa densité de charge vérifie :

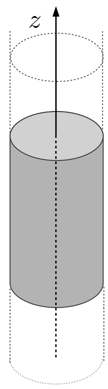
$$\rho(M) = -\rho(M')$$

Conséquence : la charge totale d'une distribution antisymétrique est nulle.

III.5. Géométries particulières

Certaines distributions combinent plusieurs invariances et symétries.

a) Symétrie cylindrique



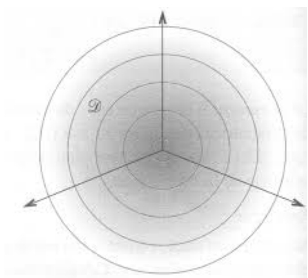
La distribution est

- invariante par translation quelconque suivant $\vec{u}_z$.
- invariance par rotation quelconque autour de $\vec{u}_z$.

$$\rho(r, \theta, z) = \rho(r)$$

Tout plan contenant l'axe Oz est alors plan de symétrie.

b) Symétrie sphérique



La distribution est invariante par rotation autour de tout axe passant par O. On a, en coordonnées sphériques :

$$\rho(r, \theta, \varphi) = \rho(r)$$

Tout plan contenant O est alors plan de symétrie.