Résolution d'une équation différentielle du premier ordre à coefficients constants

Rappels

On considère une équation différentielle (E) linéaire du premier ordre à coefficients constants vérifiée par une fonction $f(t)$. On se place dans le cas particulier où le second membre de cette équation est constant. Cette équation peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau} f = \mathcal{C} \quad \text{avec} \quad \mathcal{C} = cte \tag{E}$$

On peut vérifier que τ est homogène à un temps.

Si la condition initiale $f(0)$ est connue alors la solution $f(t)$ existe et est unique.

On associe à (E) l'équation homogène (E0) où le membre de droite est nul :

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau} f = 0 \tag{E0}$$

- La solution générale de l'équation homogène (E0) vérifie

  $$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{\tau} f$$

  qui admet comme solutions des fonctions de la forme

  $$f_h(t) = \lambda e^{-t/\tau} \text{ avec } \lambda \text{ une constante réelle.}$$

- Une solution particulière de (E) lorsque le second membre $\mathcal{C}$ est une constante est également une constante $f_p(t) = K$ avec $K = cte$ telle que

  $$\underbrace{\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}t}}_{0} + \frac{1}{\tau} K = \mathcal{C}$$

  $$f_p(t) = K = \mathcal{C}\tau$$

Retenir :

Pour résoudre une équation différentielle linéaire du premier ordre il faut

- ▷ Déterminer la solution de l'équation homogène (E0)

  $$f_h(t) = \lambda\, e^{-t/\tau}$$

- ▷ Déterminer une solution particulière de (E). Lorsque le second membre $\mathcal{C} = cte$ on a :

  $$f_p(t) = K = \mathcal{C}\tau$$

- ▷ Sommer la solution de l'équation homogène et la solution particulière

  $$f(t) = f_h(t) + f_p(t) = \lambda e^{-t/\tau} + \mathcal{C}\tau$$

- ▷ **Toujours en dernier :** utiliser la condition initiale $f(0)$ pour déterminer la constante λ.

  $$f(0) = \lambda + \mathcal{C}\tau \;\Leftrightarrow\; \lambda = f(0) - \mathcal{C}\tau$$

  d'où

  $$f(t) = \mathcal{C}\tau + [f(0) - \mathcal{C}\tau]\, e^{-t/\tau}$$

On suppose $\tau > 0$. Pour $t \gg \tau$, $f \simeq f_p = C\tau$. La fonction f tend vers une valeur limite f_ℓ telle que

$$f_\ell = f_p = \mathcal{C}\tau$$

La forme canonique de l'équation sera

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}f = \frac{1}{\tau}f_\ell$$

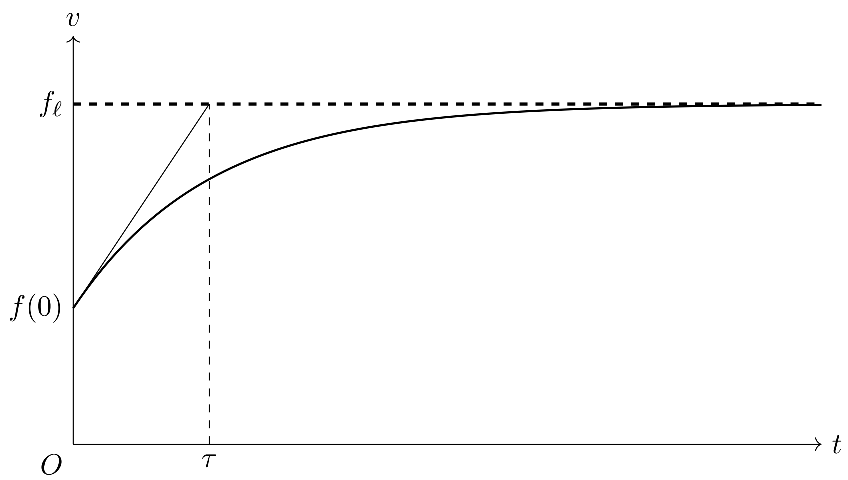
avec τ temps caractéristique et f_ℓ valeur limite.

La solution s'exprime alors sous la forme :

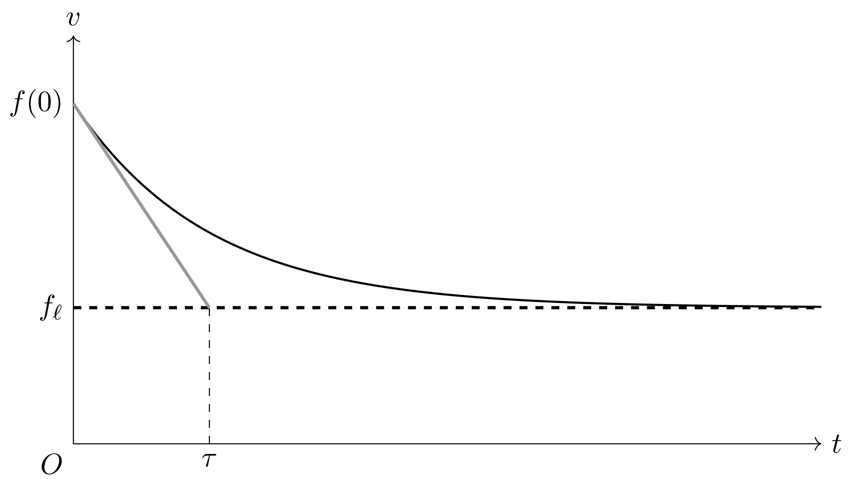
$$f(t) = f_\ell + [f(0) - f_\ell]\, e^{-t/\tau}$$

La courbe représentative de la solution pour $t \geqslant 0$ sera

- si $f(0) < f_\ell$ on observe une croissante exponentielle :



- si $f(0) > f_\ell$, on observe une décroissance exponentielle :



Dans tous les cas, la tangente à la courbe à l'origine coupe l'asymptote $f = f_\ell$ pour $t = \tau$. Ce temps caractéristique donne un ordre de grandeur du temps nécessaire pour atteindre la valeur limite f_ℓ.

Exercices d'application

On se propose de résoudre des équations différentielles d'ordre 1 à coefficient constant qui se rencontrent dans divers domaines de la physique.

Chute avec frottements visqueux (fait en cours)

Une bille sphérique de masse m chute verticalement dans le champ de pesanteur en subissant une force de frottement visqueux. Sa vitesse vérifie l'équation

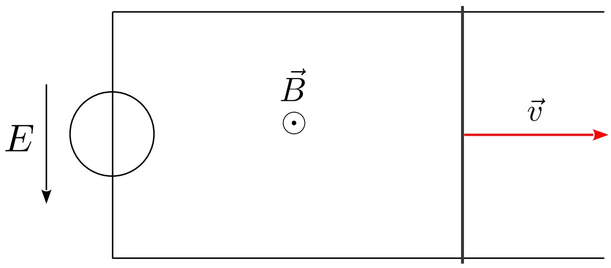
$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \alpha\, v = mg$$

Déterminer la vitesse $v(t)$ de la bille en fonction du temps en supposant la vitesse initiale $v(0) = v_0$. Exprimer la vitesse limite v_ℓ ainsi que le temps caractéristique τ en fonction de m, α et g. Tracer l'allure de la solution, en supposant que $v_0 < v_\ell$.

Rails de Laplace

On considère une tige métallique de longueur L, de masse m et de résistance R pouvant se déplacer rectilignement. Elle est déposée sur des rails métalliques alimentés par un générateur de force électromotrice E. L'ensemble du circuit est soumis à un champ magnétique de norme B. L'équation différentielle vérifiée par la vitesse de la tige est :

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{B^2L^2}{mR}v + \frac{EBL}{mR}$$

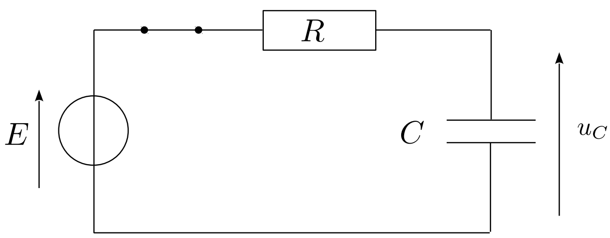


Déterminer la vitesse v de la tige en fonction du temps, en la supposant initialement immobile. Préciser quelle est la vitesse limite v_ℓ ainsi que le temps caractéristique τ. Tracer l'allure de la solution.

Charge d'un condensateur

Dans un circuit RC série alimenté à partir de $t = 0$ par un générateur de tension de force électromotrice E, la tension u_C aux bornes d'un condensateur, initialement déchargé ($u_C(0) = 0$), vérifie l'équation différentielle

$$\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{u_C}{RC} = \frac{E}{RC}$$



Déterminer l'évolution temporelle de la tension u_C. Préciser sa valeur asymptotique u_{C_∞} ainsi que le temps caractéristique τ. Tracer l'allure de la solution.

Café chaud

Ayant préparé une tasse de café de température initiale $T_0 = 80°\text{C}$, on observe qu'au bout de dix minutes la température est descendue à $T_1 = 60°\text{C}$. On cherche à savoir combien de temps la tasse mettra pour perdre $20°\text{C}$ supplémentaires. La température ambiante est $T_{\text{ext}} = 20°\text{C}$.

1. Expliquer pourquoi la réponse simple "dix minutes de plus" est très certainement fausse. Doit-on attendre plus ou moins longtemps ?

On modélise la variation de température par l'équation différentielle :

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -\alpha(T - T_{\text{ext}})$$

2. Commenter l'équation différentielle proposée du point de vue de la physique.
3. En supposant que cette équation s'applique, exprimer la loi d'évolution de la température en fonction du temps. Faire apparaître un temps caractéristique τ
4. Exprimer l'instant t_2 pour lequel la température de la tasse atteint $T_2 = 40°\text{C}$ et faire l'application numérique. Comparer ce résultat à celui de la question 1.

Neutralité d'un métal

On montrera dans le cours d'électromagnétisme que la densité volumique de charge ρ (correspondant à une charge par unité de volume et donc mesurée en C.m^{-3} en unité SI) au sein d'un métal vérifie l'équation :

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\rho = 0$$

avec $\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi 10^9}$ SI la permittivité électrique du vide et σ la conductivité électrique du métal, proche de 10^7 SI pour les bons conducteurs.

1. On suppose qu'à l'instant $t = 0$, il apparaît localement un amas de charge caractérisé par une densité volumique ρ_0. Déterminer $\rho(t)$ et tracer l'allure de la courbe.
2. Estimer le temps caractéristique de disparition de l'amas de charge dans un métal. Conclure.

Datation au carbone 14

D'après Wikipedia :

https://fr.wikipedia.org/wiki/Datation_par_le_carbone_14#cite_note-1

La datation par le carbone 14 est une méthode de datation radiométrique fondée sur la mesure de l'activité radiologique du carbone 14 (^{14}C) contenu dans la matière organique dont on souhaite connaître l'âge absolu, c'est-à-dire le temps écoulé depuis la mort de l'organisme (animal ou végétal).

Le domaine d'utilisation de cette méthode correspond à des âges absolus de quelques centaines d'années jusqu'à 50 000 ans. L'application de cette méthode à des événements anciens, tout particulièrement lorsque leur âge dépasse 6 000 ans (préhistoriques), a permis de les dater beaucoup plus précisément qu'auparavant. Elle a ainsi apporté un progrès significatif en archéologie et en paléoanthropologie.

Principe :

En première approche, on peut considérer que tant qu'une plante ou un animal est vivant, son organisme échange du carbone avec son environnement si bien que le carbone qu'il contient aura la même proportion de $^{14}\text{C}/\text{C}_{\text{total}}$ que dans la biosphère. Lorsque l'organisme meurt, il ne reçoit plus de ^{14}C et celui qu'il contient va se désintégrer peu à peu (...).

La datation par le carbone 14 se fonde ainsi sur la présence dans tout organisme de cet isotope en infime proportion (de l'ordre de 10^{-12} pour le rapport $^{14}\text{C}/\text{C}_{\text{total}}$). À partir de l'instant où un organisme meurt, la quantité de carbone 14 qu'il contient ainsi que son activité radiologique décroissent au cours du temps selon une loi exponentielle. Un échantillon de matière organique issu de cet organisme peut donc être daté en mesurant le rapport $^{14}\text{C}/\text{C}_{\text{total}}$ avec un spectromètre de masse, X années après la mort de l'organisme.

Soit N le nombre de noyaux radioactifs contenus dans un échantillon. L'évolution temporelle de $N(t)$ vérifie l'équation

$$\frac{\mathrm{d}N(t)}{\mathrm{d}t} = -\lambda N(t)$$

λ étant appelé constante radioactive. Elle dépend de l'élément radioactif considéré.

1. Préciser l'unité SI de la constante λ.
2. Soit $N_0 = N(0)$ le nombre de noyaux radioactifs initialement présents dans un échantillon. Déterminer $N(t)$. Faire apparaître un temps caractéristique τ de décroissance exponentielle. τ est appelé "durée de vie moyenne" d'un noyau.
3. On définit $t_{1/2}$, appelé demi-vie du noyau radioactif, comme la durée au bout de laquelle la population initiale est divisée par deux : $N(t_{1/2}) = N_0/2$. Établir la relation entre $t_{1/2}$ et τ, puis entre $t_{1/2}$ et λ. Tracer la courbe de $N(t)$ en y faisant figurer $N(t_{1/2})$, $N(2\,t_{1/2})$...
4. La proportion $^{14}\mathrm{C}/\mathrm{C}_{\mathrm{total}}$ dans la biosphère est prise égale à $c_0 = 1,0.10^{-12}$. On mesure dans un os de baleine une proportion $^{14}\mathrm{C}/\mathrm{C}_{\mathrm{total}}$ égale à $c = 3,4.10^{-13}$. Estimer l'âge de ce vestige.
5. Pour quelle raison la datation au carbone 14 ne permet-elle pas de dater des événements antérieurs à 50 000 ans ?

Donnée : demi-vie du carbone 14 : $t_{1/2} = 5730$ ans.