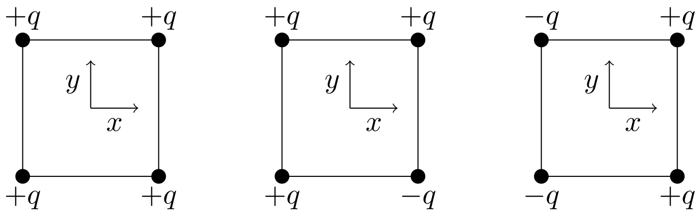
TD EM 1 Champ électrostatique

1 Distribution ponctuelle

Soient quatre charges sphériques quasiponctuelles placées aux quatre sommets d'un carré dans les diverses configurations suivantes :



À l'aide d'arguments de symétrie, représenter le champ électrostatique au centre du carré de diagonale $2a$ dans chaque situation, puis l'exprimer dans la base cartésienne proposée.

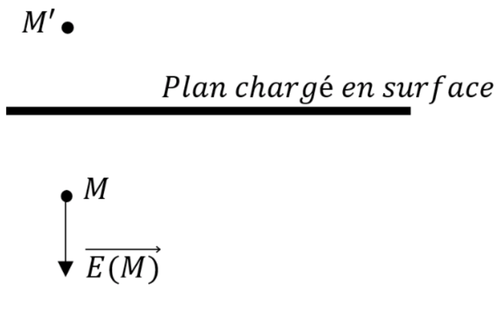
2 Calculs de charges

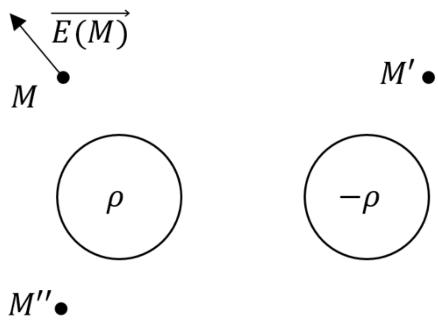
Exprimer la charge totale Q portée par chacune des distributions suivantes :

1. Un tronçon de longueur L d'espace inter- cylindrique (compris entre R_1 et R_2) chargé uniformément en volume avec la densité ρ.
2. Une sphère de rayon R chargée en surface avec la densité σ uniforme.
3. Une couche plane de dimension $L \times \ell$, d'épaisseur e, chargée en volume avec la densité ρ uniforme.
4. Un fil circulaire (= spire) de rayon R chargée avec la densité linéique uniforme λ.
5. Un ruban plan de largeur ℓ et de longueur L chargé en surface avec la densité $\sigma(x) = K_0(L - x)$, avec x la variable de position dans la longueur. Le ruban est inclus dans l'intervalle $x \in [0, L]$.
6. Une centrifugeuse est constituée d'un compartiment cylindrique de rayon R et de hauteur h qui tourne à une vitesse angulaire constante autour de son axe de symétrie de révolution (ce dernier étant vertical). Un liquide contenant des ions est placé dans ce compartiment. Du fait de la rotation, la densité volumique des ions et donc des charges n'est pas homogène et s'écrit, en coordonnées cylindriques :
$$\rho(r) = \rho_0 \frac{r}{R}$$

3 Symétries

Dessiner grâce aux symétries le champ électrique aux points M' et M''.





4 Interaction entre une particule et un fil chargé ⋆

Un fil rectiligne de longueur infinie porte des charges réparties uniformément avec une densité linéique de charge λ. Une charge ponctuelle q est placée en un point M situé à une distance $d = HM$ du fil.

Exprimer la force électrostatique $\vec{F}$ qu'exerce la charge sur le fil.

Indication : penser au principe des actions réciproques.

5 Cylindre uniformément chargé en surface

Un cylindre infini, d'axe Oz et de rayon R porte une densité surfacique de charge uniforme σ. On note $\vec{E}(M)$ le champ électrostatique créé en un point M de l'espace repéré par ses coordonnées cylindriques (r, θ, z).

1. Après avoir étudié toutes les invariances et les symétries de cette distribution, donner l'expression de $\vec{E}(M)$ pour $r < R$ et $R > r$.
2. Donner l'expression de $\vec{E}(R^+) - \vec{E}(R^-)$. Commenter le résultat obtenu.
3. Comparer l'expression du champ électrostatique obtenu pour $r > R$ avec celui calculé pour un fil infini uniformément chargé.

Conseil : avant de faire cet exercice, revoir le calcul du champ électrostatique créé par un fil infini.

6

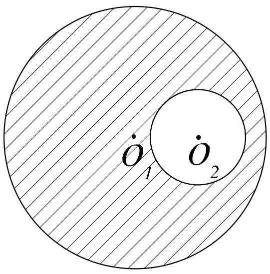
On considère un volume uniformément chargé, de densité volumique de charge uniforme ρ délimité par les deux plans infinis $z = -\frac{e}{2}$ et $z = \frac{e}{2}$.

1. Après avoir étudié toutes les invariances et les symétries de cette distribution, calculer le champ électrostatique créé en tout point.
2. Étudier la limite $e \to 0$.

Conseil : avant de faire cet exercice, revoir le calcul du champ électrostatique créé par un plan infini uniformément chargé.

7 Champ dans une cavité sphérique ⋆⋆

Soient deux sphères de rayon R_1 et $R_2 < R_1$ dont les centres O_1 et O_2 sont distants de a. On suppose $a < R_1 - R_2$. Le volume compris entre les sphères est uniformément chargé, la charge volumique étant ρ.



1. Calculer le champ électrostatique à l'intérieur de la cavité. Quelle est sa particularité ?
2. Transposer le résultat au cas gravitationnel.

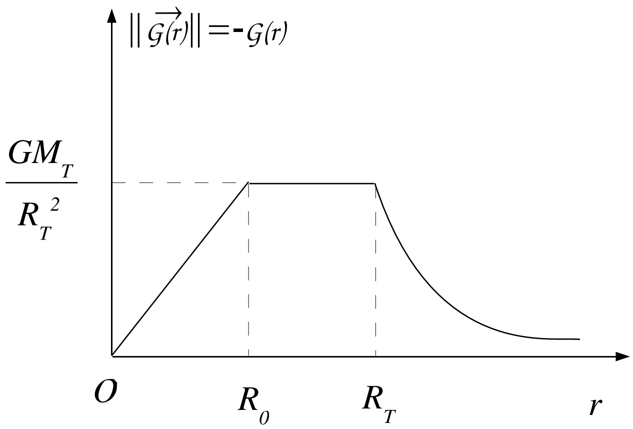
Conseil : avant de faire cet exercice, refaire le calcul du champ électrostatique créé par une sphère uniformément chargée en volume

8 Gravitation terrestre ⋆⋆⋆

On assimile la Terre à une distribution de masse à symétrie sphérique de rayon R_T. On note M_T la masse totale de la Terre et G la constante de gravitation.

1. Montrer par des considérations de symétrie que le champ gravitationnel est de la forme $\overrightarrow{\mathcal{G}} = \mathcal{G}(r)\overrightarrow{u_r}$ où $\overrightarrow{u_r}$ est le vecteur unitaire des coordonnées sphériques.
2. On suppose tout d'abord la répartition de masse homogène (la masse volumique de la Terre est supposée constante $\rho = \rho_0$). Déterminer le champ gravitationnel $\overrightarrow{\mathcal{G}}$ à l'intérieur ($r < R_T$) et à l'extérieur ($r > R_T$) de la sphère en fonction de G, M_T, R_T, r et $\overrightarrow{u_r}$.

3. En réalité la masse volumique de la Terre n'est pas constante. On peut modéliser les variations de la norme du champ gravitationnel $\|\overrightarrow{\mathcal{G}}\| = -\mathcal{G}(r)$ par la fonction tracée ci dessous :



Déterminer les expressions de la masse volumique $\rho(r)$ à l'aide des grandeurs M_T, R_T et R_0 pour $r < R_0$ et $R_0 < r < R_T$.

En déduire ensuite les expressions numériques de $\rho(r)$.

Données : $R_T = 6,4.10^3$ km
$R_0 = 3,5.10^3$ km
$G = 6,67.10^{-11}$ S.I.
$M_T = 6,0.10^{24}$ kg

en coordonnées sphériques : $\text{div}\,(A(r)\,\vec{u}_r) = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2 A(r)\right)$