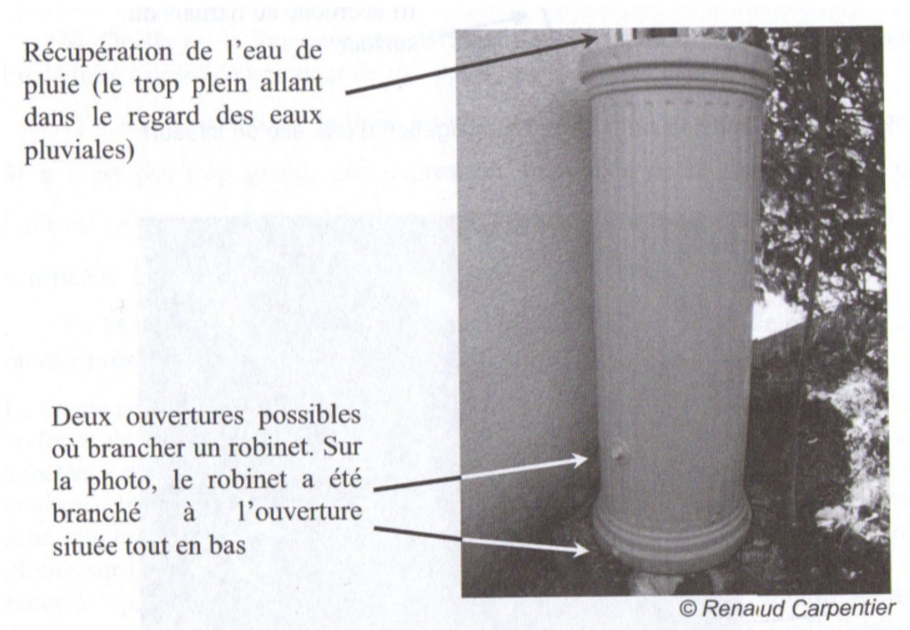
TD MF3-4 Énergétique d'un fluide en écoulement stationnaire

1 Récupérateur d'eau ⋆

Un particulier vient d'acheter un récupérateur d'eau de pluie pour pouvoir arroser son jardin potager. Le récupérateur est de forme cylindrique de hauteur $H = 1,8$ m et de rayon $R = 25$ cm. Il possède au pied une ouverture sur laquelle il est possible de brancher un robinet, ce dernier n'étant pas fourni. Il découvre dans le magasin qu'il existe des robinets de différentes tailles. Tenté d'acheter le plus petit (car le moins cher ...), il réfléchit et se dit qu'il lui faut prendre un robinet de diamètre suffisant afin de ne pas attendre trop longtemps lorsqu'il remplit son réservoir.
On supposera qu'il place le robinet au niveau de l'ouverture la plus basse. On prendra $g = 9,8$ m.s^{-2}.

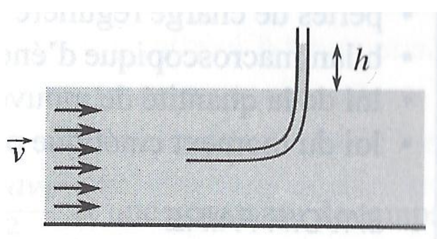


1. Calculer le diamètre minimal de sortie du robinet pour que le remplissage d'un arrosoir de 15 L dure moins de 30 s lorsque le récupérateur est plein.
2. Il est vivement conseillé de vider complètement le récupérateur pendant l'hiver. Expliquer pourquoi.
3. Calculer le temps de vidange complet du récupérateur d'eau si celui-ci est plein au départ.

Réponse : $d \geqslant 1,0$ cm ; $T_v = \frac{4R^2}{d^2}\sqrt{\frac{2H}{g}} = 1,5.10^3$ s.

2 Mesure de vitesse avec un tube coudé

Un liquide s'écoule de façon stationnaire dans un canal dont la surface supérieure est en contact avec l'atmosphère de pression P_0. Le champ de vitesse $\vec{v} = v\vec{u}_x$ est uniforme et l'écoulement est supposé parfait. Afin de mesurer v, on place un tube coudé comme indiqué sur la figure.
Le niveau de la surface libre s'y stabilise à une hauteur h au dessus de celle du liquide en écoulement. Exprimer v en fonction de h et d'autre(s) constante(s) jugée(s) nécessaire(s) que l'on définira.

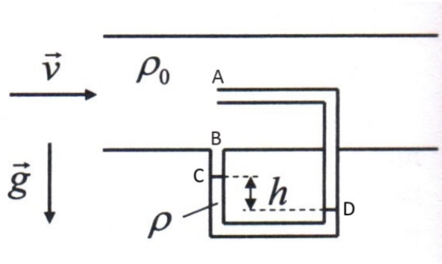


https://www.youtube.com/watch?v=3zEdtkuNYLU

Réponse : $v = \sqrt{2gh}$.

3 Tube de Pitot à prise frontale

Une sonde cylindrique horizontale est parcourue par de l'air de masse volumique ρ_0 et de vitesse $\vec{v}$ parallèle à son axe, supposé en écoulement parfait. Une dérivation avec une prise frontale et une prise latérale contient du mercure de masse volumique ρ et qui se stabilise avec une dénivellation h. La prise frontale (A) est suffisamment petite pour que l'air y soit stoppé à son entrée et la prise latérale (B) ne perturbe pas l'écoulement, de sorte que la vitesse de l'air y est identique à $\vec{v}$. Loin du tube l'écoulement est uniforme.



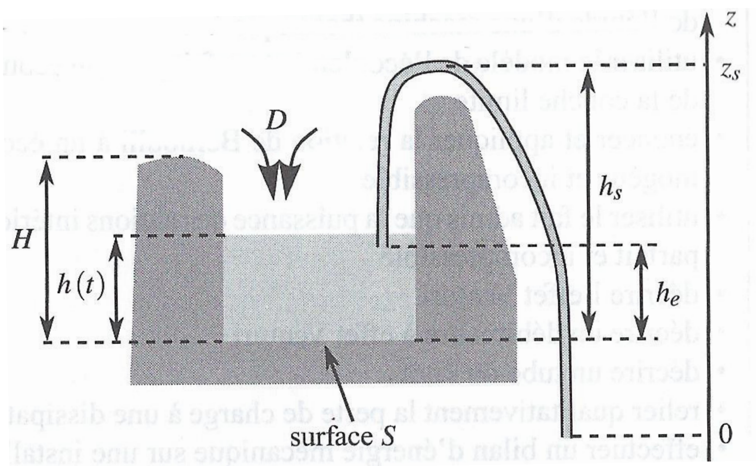
1. Tracer la ligne de courant qui passe par A. Idem pour celle passant par B.
2. Que dire de l'air et de sa pression dans le tube entre A et D ? Idem entre B et C ? Déterminer la relation entre P_A, P_B et h.
3. En exploitant les deux lignes de courant passant par A et par B montrer que la norme de la vitesse v s'exprime en fonction de $\rho g h$ et ρ_0.
4. AN : Calculer v pour $h = 3$ cm. On donne $g = 9,8$ m.s^{-2}, $\rho = 13,6.10^3$ kg.m^{-3} et dans les conditions standard $\rho_0 = 1,2$ kg.m^{-3}.

Réponse : $v = \sqrt{\dfrac{2\rho g h}{\rho_0}} = 82$ m.s^{-1}.

4 Siphon et fonte des neiges ⋆⋆⋆

Après la fonte des neiges, un bassin se remplit avec un débit volumique D constant. On suppose dans cet exercice les écoulements parfaits. Le bassin est de forme cylindrique, de section S. Il est dominé par une butte, au dessus de laquelle on fait passer un tuyau pour évacuer l'eau du bassin, grâce à un effet siphon. Le tuyau est de section s.
Le siphon est supposé initialement amorcé : il y a de l'eau dans le tuyau, qui s'écoule par son extrémité inférieure. Le schéma ci-contre résume la situation. Tous les paramètres sont supposés connus sauf s.

1. À l'aide d'une ligne de courant bien choisie établir l'expression de la vitesse de vidange en sortie de siphon en fonction de z_s, h_s, $h(t)$ et g. En déduire la relation $S\dot{h} = D - s\sqrt{2g(z_s - h_s + h(t))}$.
2. En déduire la hauteur h pour laquelle le niveau se stabilise.
3. Exprimer les inégalités vérifiées par h pour que le bassin ne déborde pas et que le siphon reste amorcé. En déduire la valeur minimale qu'il faut donner à s pour que le bassin ne déborde pas et la valeur maximale de s pour que le siphon ne se désamorce pas.

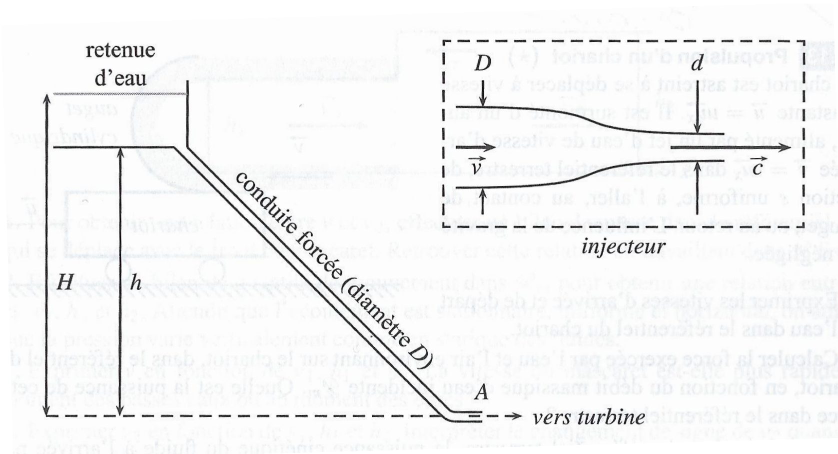


Réponse : $\frac{D}{\sqrt{2g(H+z_s-h_s)}} < s < \frac{D}{\sqrt{2g(h_e+z_s-h_s)}}$ >

5 Injecteur de turbine Pelton et cavitation ⋆⋆

Une centrale est alimentée par une conduite d'eau cylindrique de diamètre constant D, dite conduite forcée, issue du barrage. La capacité de ce barrage est suffisamment importante pour que l'on considère l'eau qu'il contient comme immobile. L'extrémité aval de la conduite, notée A, est reliée à une tubulure de section décroissante, appelée injecteur.

L'axe vertical repérant l'altitude z est orienté vers le haut. L'altitude du point A est, par convention, nulle ; on note H la dénivellation entre la surface libre de l'eau et l'axe de l'injecteur et h la différence de niveau entre l'entrée de la conduite et la sortie, en A (la différence de niveau entre la surface libre et l'entrée de la conduite est donc $h' = H - h$). L'eau est considérée comme un fluide parfait, incompressible, de masse volumique ρ ; elle sort de l'injecteur à l'air libre, sous la pression atmosphérique P_0, supposée indépendante de l'altitude. Le jet est cylindrique d'axe horizontal et de section circulaire de diamètre D dans la conduite puis d à la sortie de l'injecteur. Ce jet frappe la turbine et l'anime d'un mouvement de rotation. On considère les écoulements comme stationnaires. On néglige tout frottement.



Données : $P_0 = 1,0.10^5$ Pa, $g = 10$ m.s^{-2}, $D = 60$ cm, $H = 300$ m et $\rho = 1,0.10^3$ kg.m^{-3}

1. Dans cette question (et dans cette question seulement) on suppose que l'extrémité aval de la conduite n'est pas reliée à l'injecteur ; l'eau sort à l'air libre au point A. En justifiant l'utilisation de la relation de Bernoulli entre le point A et un point quelconque de la canalisation et en considérant la conservation du débit, exprimer $P_1(z)$ à l'intérieur de la conduite sous la forme $P_1(z) = P_0\left(1 - \frac{z}{z_0}\right)$ avec $z_0 = \frac{P_0}{\rho g}$. Calculer z_0.
   La pression de vapeur saturante de l'eau à la température ambiante est $P_{\text{sat}} \simeq 3.10^3$ Pa. Montrer qu'au delà d'une certaine altitude, à préciser, ce modèle de pression n'est plus applicable. Le phénomène qui intervient alors (cavitation) engendre toutes sortes de perturbations (attaque des matériaux, bruits, etc ...).
2. Pour pallier cet inconvénient, on visse en A sur la partie finale de la conduite un injecteur de section décroissante et de diamètre de sortie $d < D$. Montrer que la vitesse en sortie de l'injecteur, notée c est $c = \sqrt{2gH}$ (relation de Torricelli). Calculer c. Établir que la vitesse en A est $v = \left(\frac{d}{D}\right)^2 \sqrt{2gH}$.
3. Exprimer la pression $P_2(z)$ à l'intérieur de la conduite munie d'injecteur. On admet que l'entrée de la conduite est pratiquement à l'altitude H. Montrer que les phénomènes de cavitation disparaissent dans toute la conduite si $d < d_0$ et on établira l'expression de d_0 en fonction de D, P_0, P_{sat}, H, g et ρ. Vérifier que $d_0 = 25$ cm.

6 Comparaison de débits

On considère l'écoulement laminaire d'un fluide de coefficient de viscosité η dans une conduite cylindrique horizontale de section S, d'axe Ox induit par une différence de pression $P_1 - P_2 > 0$ sur une distance L entre l'amont et l'aval.

1. Quelle doit être la valeur du nombre de Reynolds pour que l'écoulement soit laminaire ?
2. Le débit volumique D_1 dans cette conduite suit la loi de Hagen-Poiseuille.

$$D_1 = \frac{\pi R^4}{8\eta L}(P_1 - P_2) = \frac{S^2}{8\pi\eta L}(P_1 - P_2)$$

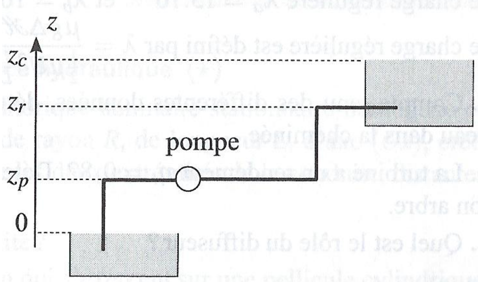
   Définir la résistance hydraulique R_h de la conduite et donner son expression.
3. On place deux canalisations identiques en parallèle (cas de la vue de face de la figure de gauche) ; quel est le débit total $D_{2\times1}$ à travers l'ensemble des deux canalisations.

4. On remplace les deux canalisations par une seule, de plus grand rayon, de section $2S$, soumise à la même différence de pression $P_1 - P_2 > 0$ sur la même distance L (cas de la figure de droite). Quel est le débit D_2 à travers cette nouvelle canalisation ? Le comparer à $D_{2\times1}$. Conclure.

Réponse : $D_2 = 2D_{2\times1}$.

7 Adduction d'un village ⋆⋆

On s'intéresse au réseau d'alimentation en eau potable d'un village. Une pompe aspire de l'eau dans un bassin, dont l'altitude de la surface libre sert d'origine à l'axe Oz vertical ascendant. La conduite d'aspiration reliant le bassin à la pompe est de longueur $L_a = 20$ m et de diamètre $D_a = 0,20$ m. Elle comporte un coude pour lequel la perte de charge singulière vaut $\zeta_a = 4,5$. La pompe est à une altitude $z_p = 3,0$ m. La conduite de refoulement qui emmène l'eau de la pompe au château d'eau est de longueur $L_r = 3,2$ km et de diamètre $D_r = 0,20$ m. Elle comporte deux coudes pour lesquels la perte de charge singulière totale a pour coefficient $\zeta_r = 2,25$. L'arrivée de cette conduite est à une altitude $z_r = 240$ m. Dans le château d'eau, la surface libre de l'eau est à une altitude $z_c = 250$ m. Ces deux conduites sont réalisées avec le même matériau et présentent une rugosité $\varepsilon = 1,0$ mm. La pompe fonctionne jour et nuit, avec un débit D_v de 125 m^3 par heure. On utilisera les données habituelles pour l'eau et le champ de pesanteur.



1. Déterminer la vitesse débitante U dans les conduites et le nombre de Reynolds. À l'aide du diagramme de Moody, donné en cours, déterminer la valeur du coefficient de perte de charge régulière λ pour ces conduites. On rappelle que les pertes de charges régulières J pour une conduite de diamètre D et de longueur L s'expriment sous la forme

$$J = \lambda \frac{L}{D}\frac{1}{2}\rho U^2$$

2. Déterminer la puissance mécanique que doit fournir la pompe nécessaire au fonctionnement de cette installation.

Réponse : $\lambda = 3.10^{-2}$; $\mathcal{P} = 95$ kW.

8 Champ de vitesse de l'écoulement de Poiseuille cylindrique ⋆⋆

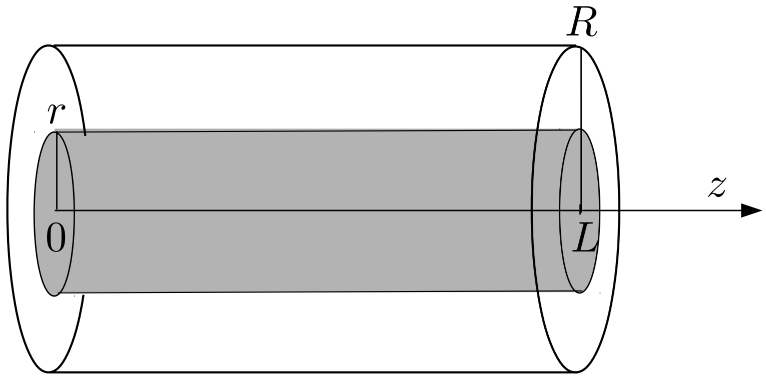
On considère un écoulement stationnaire d'un fluide visqueux incompressible dans une canalisation cylindrique de rayon R et de longueur L. On suppose l'effet du poids négligeable. On peut alors considérer que la pression est uniforme dans chaque section de conduite et ne dépend que de z. On la notera $P(z)$.

On cherche un champ de vitesse de la forme :

$$\vec{v}(M) = v_z(r)\vec{u}_z$$

1. Vérifier que le champ de vitesse proposé correspond bien à celui d'un fluide incompressible.

On choisit comme système fermé le fluide contenu, à un instant donné, dans un volume V cylindrique de rayon r, d'axe Oz et de longueur L.



L'écoulement étant stationnaire, les trajectoires des particules fluides sont confondues avec les lignes de courant : ce sont donc des droites parallèles à l'axe Oz. Puisque v_z ne dépend pas de z, chaque particule fluide se déplace à vitesse constante : elle décrit donc un mouvement rectiligne uniforme : on pourra donc considérer que la quantité de mouvement du système est constante et que la somme des forces extérieures qu'il subit est nulle.

Force de viscosité
Le fluide contenu dans le cylindre subit des forces de frottements sur sa paroi latérale. On donne la loi définissant la force tangentielle subie par un élément de surface dS :

$$\mathrm{d}\vec{F} = \eta \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}r}(r)\,\mathrm{d}S\,\vec{u}_z$$

avec η le coefficient de viscosité du fluide.

2. Donner l'expression de $\vec{F}$ la résultante des forces de viscosité qui s'exercent sur la surface latérale du cylindre.

Forces de pression

3. Donner l'expression de la résultante des forces de pression s'exerçant sur le système en fonction de $P(0)$, $P(L)$ et r.

Champ de vitesse

4. La résultante des forces étant nulle, établir une relation entre $\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}r}$, $P(0) - P(L)$, r, η et L.

5. En déduire, par intégration, l'expression de $v(r)$ sachant qu'un fluide visqueux adhère aux parois ($v_z(R) = 0$).

Résistance hydraulique

6. Exprimer le débit volumique D_v de la conduite et en déduire la loi de Poiseuille reliant le débit volumique à la perte de charge :

$$D_v = \frac{\pi R^4}{8\eta L}(P(0) - P(L))$$

7. Par analogie avec l'électrocinétique, définir une résistance hydraulique R_h pour une conduite de longueur L et de rayon R, et donner son expression.

On donne l'expression de la divergence d'un champ vectoriel en coordonnées cylindriques :

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$