TD - M2 - Énergie potentielle

Avant de commencer ce TD :

→ avoir fait tous les calculs d'énergie potentielle de pesanteur de la fiche "connaissances de base"

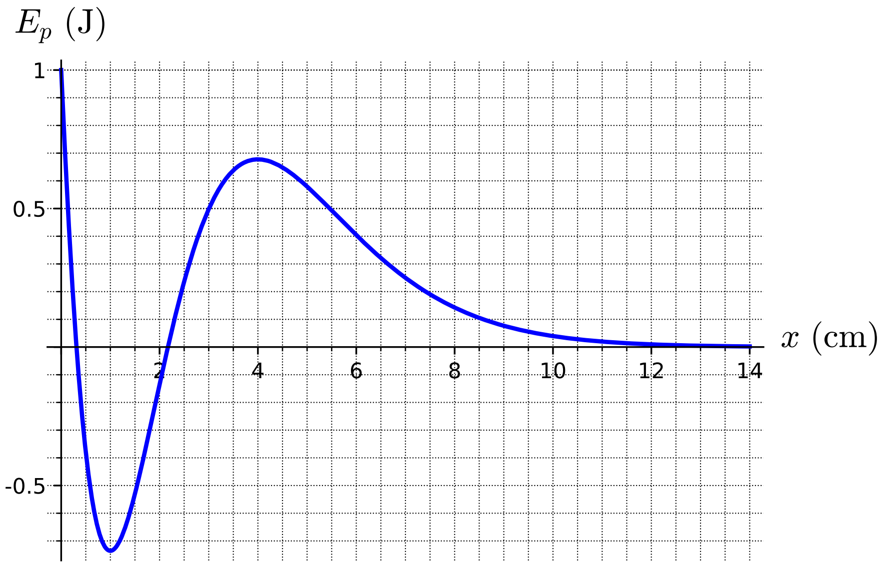
→ reprendre à titre d'exercice les exemples de la partie III.4 du cours.

→ calculer les dérivées des fonctions suivantes par rapport à x :

- $f(x) = (x+a)^2$
- $f(x) = x(x^2+a^2)$
- $f(x) = (a-x)^2$
- $f(x) = \dfrac{1}{x}$
- $f(x) = \tan x$
- $f(x) = \dfrac{1}{\cos x}$

1 Détermination de positions d'équilibre

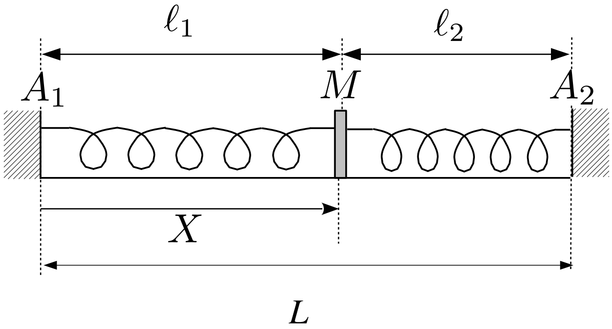
Un point matériel, repéré par sa position x, possède une énergie potentielle dont le profil est indiqué sur la courbe ci-dessous :



Déterminer graphiquement les positions d'équilibre et indiquer leur stabilité.

2 Deux ressorts horizontaux ⋆

La loi reliant la force de rappel à l'étirement d'un ressort, souvent appelée loi de Hooke par les anglo-saxons, est, pour la plupart des ressorts, mieux vérifiée en détente qu'en compression.
Or, au cours des oscillations horizontales d'une masse accrochée à un ressort, ce dernier est comprimé durant la moitié du temps. C'est pourquoi on préfère souvent utiliser deux ressorts pour réaliser des oscillations horizontales. On ajuste la longueur totale du dispositif de manière à ce que les deux ressorts soient toujours étirés.

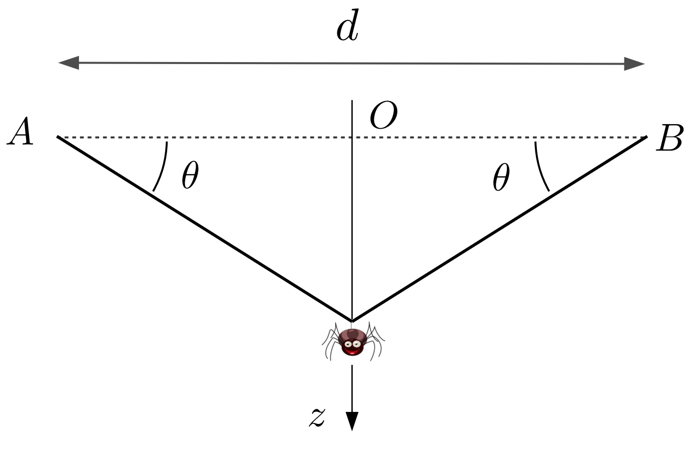


Deux ressorts R_1 et R_2 de longueur à vide $\ell_{0_1} = 15$ cm et $\ell_{0_2} = 25$ cm, de raideurs respectives $k_1 = 50$ N.m^{-1} et $k_2 = 200$ N.m^{-1} sont fixés à un point matériel M de masse m susceptible de se déplacer horizontalement sans frottement. Les autres extrémités des ressorts sont fixées en A_1 et A_2. Les points A_1, A_2 et M sont toujours alignés. On donne $A_1A_2 = L = 60$ cm.

Par une méthode énergétique, déterminer les longueurs ℓ_{e_1} et ℓ_{e_2} de chaque ressort à l'équilibre.

3 Masse suspendue à un élastique ⋆ ⋆ ⋆

Un fil élastique, de masse négligeable, de raideur k, de longueur à vide ℓ_0, est fixé par ses extrémités en deux points A et B de même altitude et distants de d. En son milieu est accroché un objet quasi-ponctuel de masse m.

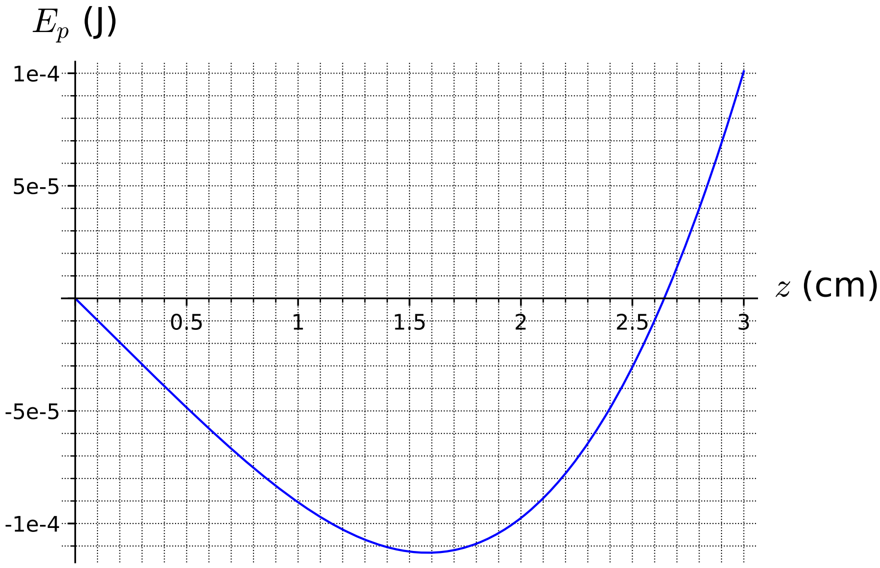


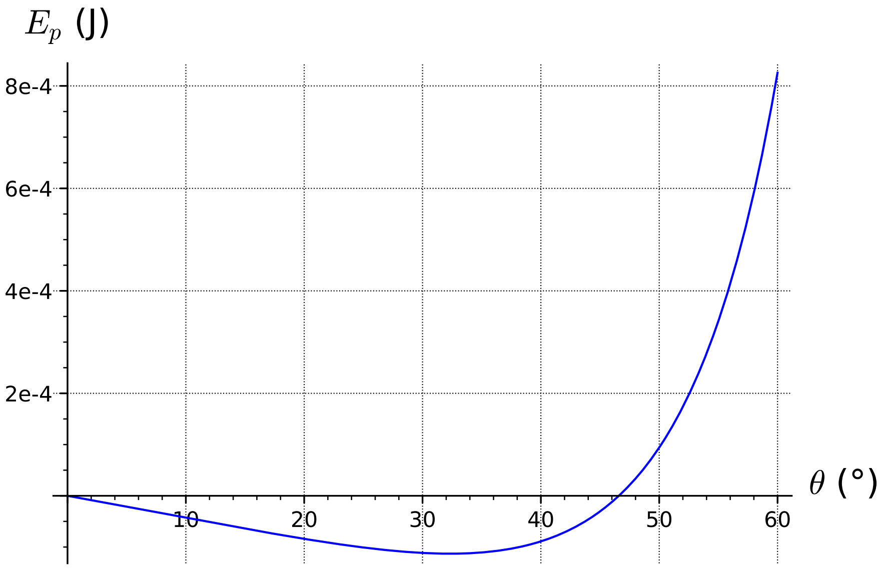
Caractériser la position d'équilibre. Pour cela, on établira au choix, soit l'équation vérifiée par θ, soit l'équation vérifiée par z à l'équilibre.

On peut résoudre numériquement à la calculatrice l'équation obtenue.

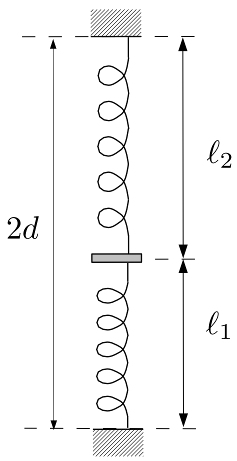
Données : $k = 1,0$ N.m^{-1}, $m = 1,0$ g, $d = \ell_0 = 5,0$ cm, $g = 9,8$ m.s^{-2}.

On a tracé ci-après les graphes donnant l'énergie potentielle, soit en fonction de z, soit en fonction de θ. Déterminer graphiquement les valeurs de θ et de z à l'équilibre. Vérifier la cohérence avec la solution numérique obtenue.





4 Masse ponctuelle liée à deux ressorts ⋆

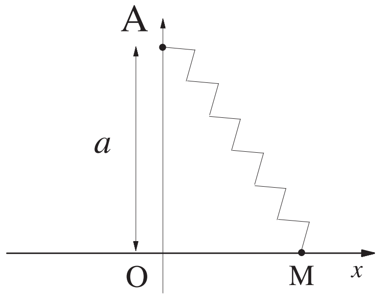


Une masse m de dimension négligeable par rapport à ℓ_1 et ℓ_2 est reliée à deux ressorts identiques placés verticalement. Les extrémités des ressorts sont distantes de $2d$. Chaque ressort non tendu a une longueur à vide ℓ_0. et une constante de raideur k.

1. Calculer les longueurs ℓ_{1e} et ℓ_{2e} des ressorts à l'équilibre.
2. Montrer que si $mg \ll 2kd$, on peut prendre $\ell_{1e} = \ell_{2e}$. Interpréter.

5 Détermination de positions d'équilibre. Étude de leur stabilité ⋆ ⋆

On considère le système représenté sur la figure ci-contre. La masse m glisse sans frottement le long de l'axe Ox. Elle est attachée à un ressort de longueur à vide ℓ_0, de raideur k, fixé en A d'abscisse a.

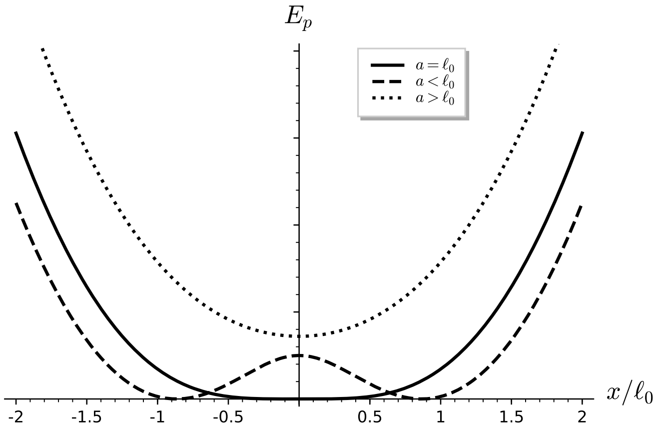


1) Exprimer $E_p(x)$, l'énergie potentielle de la masse m. On pourra choisir l'énergie potentielle élastique nulle lorsque le ressort a sa longueur à vide.

2) En déduire les positions d'équilibre possibles. On distinguera les trois cas suivants :

- $a < \ell_0$
- $a = \ell_0$
- $a > \ell_0$

3) Étudier la stabilité des positions d'équilibre déterminées précédemment par le calcul et graphiquement en utilisant le graphe ci-dessous.



Il pourra être profitable de consulter le site :
https://phyanim.sciences.univ-nantes.fr/Meca/Oscillateurs/ressort_bifur.php

Bilan des compétences mises en œuvre :

- savoir exprimer une énergie potentielle élastique en fonction des paramètres et de la variable d'espace choisie
- savoir exprimer une énergie potentielle de pesanteur en fonction des paramètres et de la variable d'espace choisie (en tenant compte de l'orientation choisie pour l'axe vertical)
- connaître la condition d'équilibre $\left(\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x}\right)_{x=x_e} = 0$ et savoir l'interpréter graphiquement
- savoir déterminer la stabilité d'un équilibre
- savoir dériver une fonction composée