TD EM8b - Réflexion d'une onde électromagnétique sur un plan conducteur parfait

1 Guide d'ondes

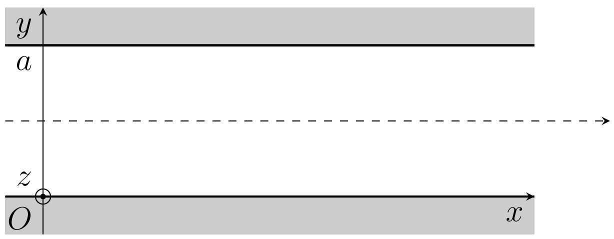
Un guide d'onde est constitué de deux plans parfaitement conducteurs situés en $y = 0$ et $y = a$ entre lesquels est guidée une onde électromagnétique de la forme

$$\underline{\vec{E}} = \left[Ae^{\mathrm{i}k_2 y} + Be^{-\mathrm{i}k_2 y}\right] e^{\mathrm{i}(\omega t - k_1 x)}\vec{u}_z \quad (A, B) \in \mathbb{R}^2$$

Donnée : On rappelle la relation de passage pour le champ électrique à l'interface entre deux milieux 1 et 2,

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}_{1\to 2}$$

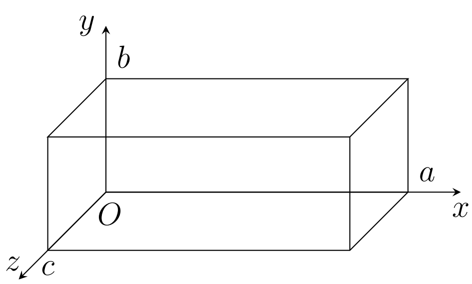
avec $\vec{n}_{1\to 2}$ le vecteur unitaire normal orienté de 1 vers 2.



1. L'expression de $\underline{\vec{E}}$ fournie est-elle en accord avec l'équation de Maxwell-Gauss dans le vide ?
2. Montrer que cette onde est une superposition de deux ondes planes progressives harmoniques (OPPH) dont on précisera les vecteurs d'onde notés $\vec{k}_\pm$. Représenter ces deux vecteurs.
3. Que valent les champs électrique et magnétique dans un conducteur parfait ? En utilisant les conditions aux limites en $y = 0$ et en $y = a$ pour le champ électrique, établir une relation entre A et B et une condition sur k_2 dépendant d'un entier n.
4. Déterminer l'inclinaison $\theta_\pm$ des deux OPPH avec l'axe du guide en fonction de leur longueur d'onde λ et a.
5. En déduire une inégalité sur λ, pour n donné.
6. En déduire, pour une valeur de n donnée, la pulsation minimale des ondes pouvant se propager dans le guide.
7. Donner l'expression finale du champ $\underline{\vec{E}}$ puis du champ réel $\vec{E}$ pour une valeur de n donnée. Commenter sa structure dans les directions x et y.

2 Champ électromagnétique dans une cavité

On considère une cavité parallélépipédique de côtés ($x = a$, $y = b$, $z = c$) à parois parfaitement conductrices.



On souhaite déterminer les différents modes propres pouvant exister à l'intérieur de cette cavité.

On donne, dans un repère orthonormé $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$:

$$\vec{E_0}(E_1, E_2, E_3)$$

$$\vec{k}(k_1, k_2, k_3)$$

On cherche les composantes du vecteur $\overrightarrow{E}$ sous la forme :

$$\begin{aligned}
E_x &= E_1 \cos(k_1 x + \varphi_1)\, \sin(k_2 y + \varphi_2)\, \sin(k_3 z + \varphi_3) \sin(\omega t) \\
E_y &= E_2 \sin(k_1 x + \varphi_1)\, \cos(k_2 y + \varphi_2)\, \sin(k_3 z + \varphi_3) \sin(\omega t) \\
E_z &= E_3 \sin(k_1 x + \varphi_1)\, \sin(k_2 y + \varphi_2)\, \cos(k_3 z + \varphi_3) \sin(\omega t)
\end{aligned}$$

1. Rappeler l'équation de Maxwell-Gauss vérifiée par le champ électrique dans le vide. En déduire une relation entre E_1, E_2, E_3, k_1, k_2, et k_3.
2. Montrer que, dans le vide, $\vec{E}$ vérifie l'équation de propagation de d'Alembert.
3. À l'aide d'une des équations de Maxwell, établir l'expression du champ magnétique $\vec{B}$ à partir de celle du champ électrique $\vec{E}$.
4. Rappeler les conditions aux limites aux parois que doivent vérifier les composantes tangentielle ou normale des champs électrique et magnétique.
5. Exprimer ces conditions aux limites au niveau des plans $x = 0$ et $x = a$. En déduire que l'on peut choisir $\varphi_1 = 0$ et que les valeurs k_1 sont de la forme :

$$k_1 = n_1 \frac{\pi}{a} \quad \text{avec } n_1 \in \mathbb{N}$$

6. Par analogie, déduire des conditions aux limites sur les autres parois les valeurs de φ_2 et φ_3, ainsi que les conditions vérifiées par k_2 et k_3 (on introduira les entiers n_2 et n_3).
7. Déduire de l'équation de propagation établie à la question 2, une expression de la pulsation ω du mode caractérisé par les entiers (n_1, n_2, n_3).
8. Donner l'expression des trois composantes E_x, E_y, E_z du champ électrique du mode associé aux entiers (n_1, n_2, n_3).

   Que devient cette expression dans le cas où $n_1 = 2$, $n_2 = 0$ et $n_3 = 3$?
9. Pourquoi un four micro-ondes est-il équipé d'un plateau tournant ?