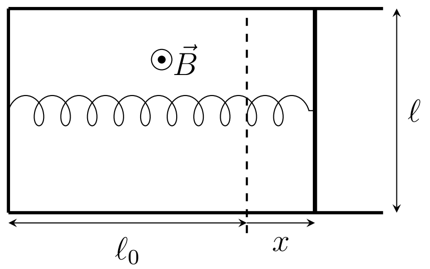
TD EM 7 - Circuit mobile dans un champ magnétique variable

1 Rails de Laplace

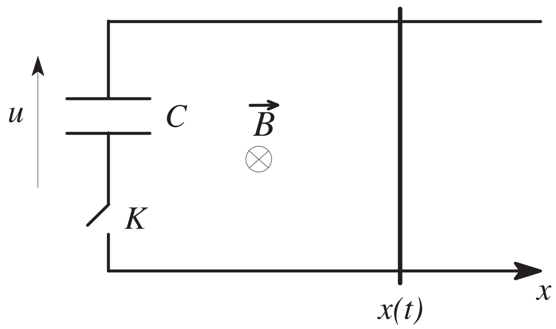
Un circuit est constitué par deux rails rectilignes, parallèles, horizontaux, de résistance négligeable et dont l'écartement est ℓ. Ces rails sont reliés à l'une de leur extrémité par une tige fixe de résistance négligeable et à l'autre extrémité par une tige de résistance R susceptible de se mouvoir sans frottement sur les rails et attachée à un ressort de constante de raideur k. L'ensemble se trouve plongé dans un champ magnétique $\overrightarrow{B}$ uniforme vertical. (On négligera le champ propre du circuit devant le champ magnétique extérieur).
À l'instant initial on étire le ressort d'une longueur a et on le lâche sans vitesse.

- ▷ Analyser le mouvement ultérieur de la tige.
- ▷ Établir l'équation électrique et l'équation mécanique. En déduire l'équation différentielle vérifiée par x l'élongation du ressort ($x = 0$ lorsque le ressort a sa longueur à vide).
- ▷ Discuter des différents types de mouvements ultérieurs possibles.
- ▷ Faire un bilan énergétique.



2 Rails de Laplace ⋆⋆⋆

On considère deux rails rectilignes parallèles horizontaux de résistance nulle, d'écartement ℓ. L'une de leurs extrémités est reliée à un condensateur de capacité C en série avec un interrupteur K, l'autre est constituée d'une tige de masse m, de résistance R, susceptible de se mouvoir sans frottement. L'ensemble est plongé dans un champ magnétique uniforme vertical $\overrightarrow{B}$. On négligera le champ magnétique propre du circuit.
À $t = 0$ on ferme K avec $u(0) = U_o$, $x = 0$, $\dot{x} = 0$.

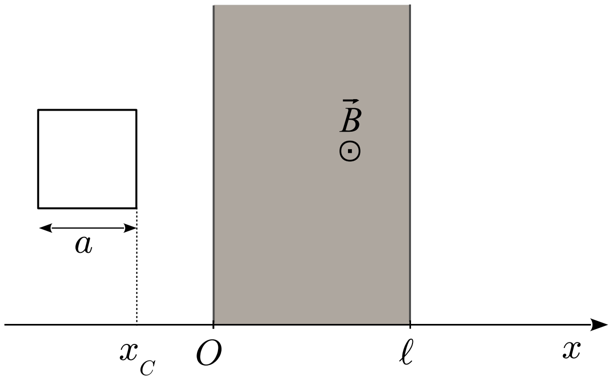


1. Établir les équations électrique et mécanique. En déduire l'équation différentielle vérifiée par $u(t)$. On pourra poser $\tau_1 = RC$ et $\tau_2 = \dfrac{mR}{B^2\ell^2}$.
2. Déterminer $u(t)$. En déduire $\dot{x}(t)$.
3. Faire un bilan énergétique.

Réponses : $u(t) = \frac{\tau_1}{\tau_1+\tau_2} U_0 + \frac{\tau_2}{\tau_1+\tau_2} U_0 \, e^{-\frac{t}{\tau}}$; $\dot{x}(t) = \frac{B\ell C}{m} \frac{\tau_2 U_0}{\tau_1+\tau_2}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$ avec $\tau = \frac{\tau_1\tau_2}{\tau_1+\tau_2}$.

3 Freinage d'un mobile en translation ⋆

On considère une spire carrée de côté a, en translation rectiligne selon l'axe Ox (la spire est guidée dans un plan horizontal, sans frottement, par un dispositif non représenté sur la figure). Le champ magnétique $\vec{B}$ est nul sauf dans le domaine $0 \leqslant x \leqslant \ell$ où il est alors uniforme et stationnaire, égal à $B\,\vec{e}_z$. On utilise un repère cartésien direct $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ et on considère $\ell > a$. La position du cadre est représentée par l'abscisse $x_C(t)$ de son segment droit.



On lance le cadre avec une vitesse $v_0\,\vec{e}_x$ depuis la partie de champ magnétique nul correspondant à $x_C < 0$. Le cadre pénètre dans la zone de champ magnétique non nul à $t = 0$ et on étudie ensuite la dynamique du cadre. Le circuit défini par le cadre a une masse m et présente une résistance R. Son inductance propre est supposée négligeable.

1. Étude qualitative du mouvement

En faisant une analyse des phénomènes physiques intervenant au cours du déplacement du circuit, décrire qualitativement des différentes phases possibles de son mouvement.

2. Entrée dans la zone de champ magnétique $0 \leqslant x_C \leqslant a$

a. Exprimer la fem induite dans le circuit.

b. En déduire la résultante des forces de Laplace qui s'exerce sur le cadre. Commenter le résultat obtenu.

c. Déterminer l'expression de la vitesse $v_x(t)$, puis de l'abscisse $x_c(t)$ pour $0 \leqslant x_C \leqslant a$. On introduira la constante de temps $\tau = \dfrac{mR}{a^2B^2}$.

d. Déterminer la date t_1 correspondant à $x_C(t_1) = a$, en fonction de v_0, a et τ. On supposera la condition $\tau v_0 > a$ vérifiée. Que se passerait-il sinon ?

3. $a \leqslant x_C \leqslant \ell$

a. Quelle est la fem induite durant cette phase ?

b. En déduire la vitesse du cadre pour $x_C = \ell$ en fonction de v_0, τ et a.

c. On note t_2 la date à laquelle $x_C(t_2) = \ell$. Déterminer l'expression de la durée $t_2 - t_1$ de cette phase, en fonction de a, ℓ, v_0, et τ.

4. Sortie de champ magnétique $\ell \leqslant x_C \leqslant \ell + a$

a. Exprimer la fem induite dans le circuit défini par le cadre.

b. En déduire la résultante des forces de Laplace qui s'exerce sur la cadre. Commenter le résultat obtenu.

c. Déterminer l'expression de la vitesse $v_x(t)$ en fonction de v_0, a, τ et t_2. En déduire l'abscisse $x_c(t)$ en fonction de v_0, a, τ, ℓ et t_2.

d. On note t_3 la date à laquelle $x_C(t_3) = \ell + a$. Déterminer l'expression de la durée $t_3 - t_2$ en fonction de τ, v_0 et a. On supposera la condition $\tau v_0 > 2a$ vérifiée. Que se passerait-il sinon ?

e. Déterminer $v_x(t_3)$.