Exos - Oscillations libres par une méthode énergétique

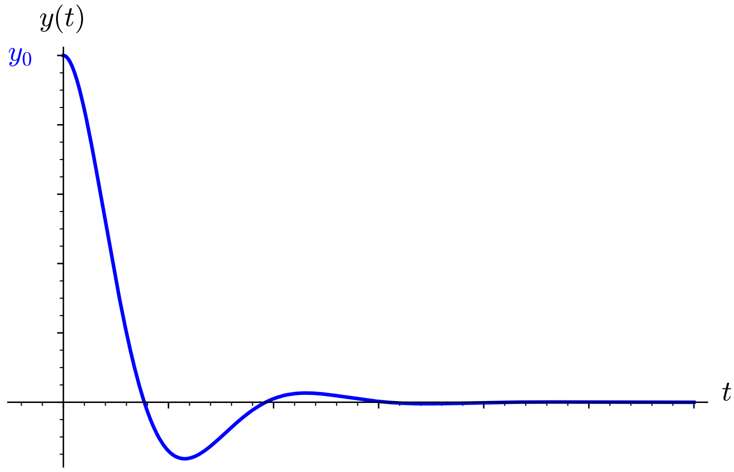
Résolution d'équations différentielles d'ordre 2

Résoudre les équations suivantes et tracer qualitativement le graphe des solutions $y(t)$, $U(t)$, $z(t)$ et $I(t)$.

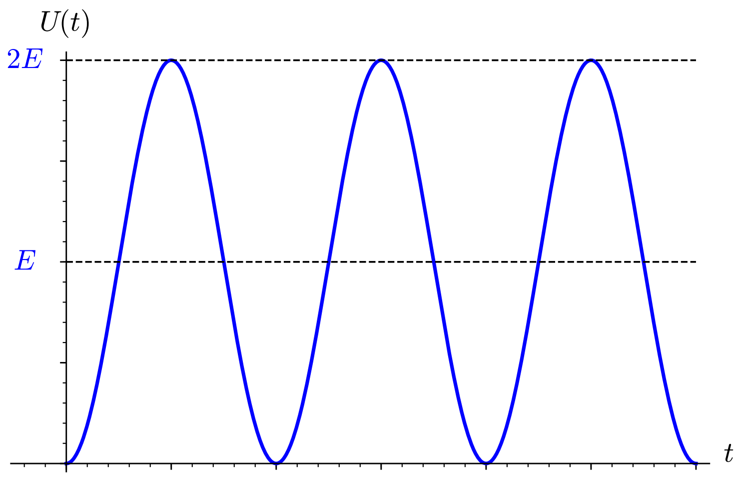
- ▷ $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 y = 0$ avec $y(0) = y_0$ et $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(0) = 0$.
- ▷ $\dfrac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{U}{LC} = \dfrac{E}{LC}$ avec $U(0) = 0$ et $\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}(0) = 0$.
- ▷ $\dfrac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{\omega_0}{Q}\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 z = \omega_0^2 H$ avec $Q = 0.1$, $z(0) = 0$ et $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(0) = 0$.
- ▷ $\dfrac{\mathrm{d}^2I}{\mathrm{d}t^2} + 2f\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + f^2 I = 0$ avec $f = cte$, $I(0) = 0$ et $\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}(0) = fI_0$.

Réponses :

- ▷ $y(t) = y_0 e^{-\omega_0 t/2}\left[\cos(\dfrac{\omega_0\sqrt{3}}{2}t) + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\sin(\dfrac{\omega_0\sqrt{3}}{2}t)\right]$



- ▷ $U = E\left(1 - \cos(\frac{t}{\sqrt{LC}})\right)$

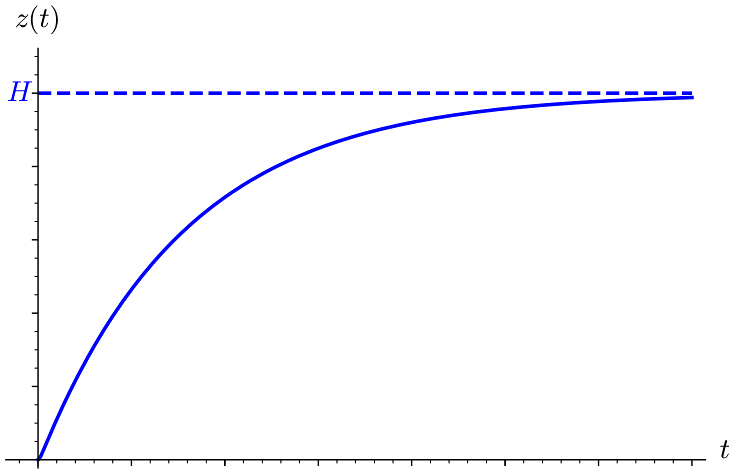


▷ $z = \dfrac{H}{r_2 - r_1}\left(-r_2 e^{r_1 t} + r_1 e^{r_2 t}\right) + H$
avec r_1 et r_2 les deux racines de l'équation caractéristique :

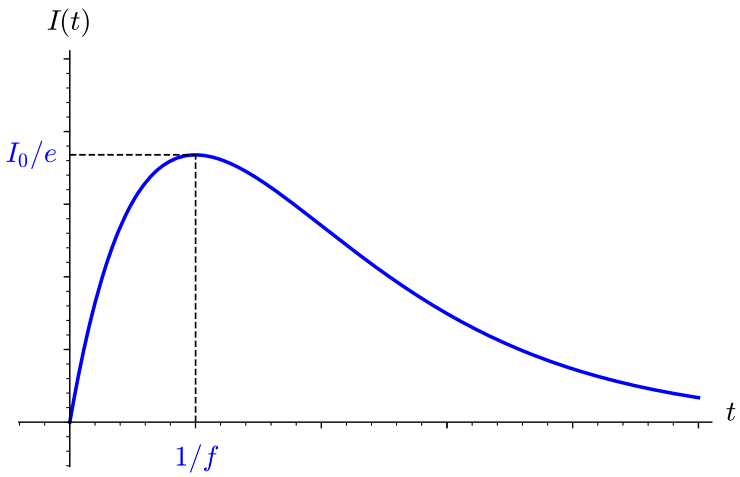
$$r^2 + 10\,\omega_0 r + \omega_0^2 = 0$$

$$r_{1,2} = (-5 \pm 2\sqrt{6})\,\omega_0$$

Ces deux racines étant négatives on obtient des exponentielles décroissantes : $\lim\limits_{t \to +\infty} z(t) = H$.



▷ $I(t) = f I_0 t e^{-ft}$



Masse percutant un ressort

Un mobile quasi-ponctuel M de masse m glisse sans frottement sur un plan horizontal et selon la direction de l'axe Ox, sa vitesse est constante $\vec{v}_0 = v_0\vec{u}_x$ (avec $v_0 > 0$).
Un ressort de constante de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 est fixé en A à une paroi (cf FIGURE 1).

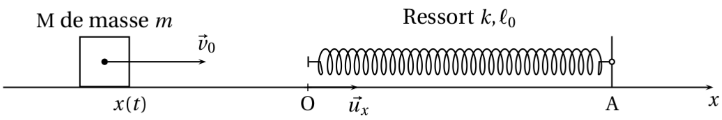


FIGURE 1 : Mobile en approche, $t < 0$.

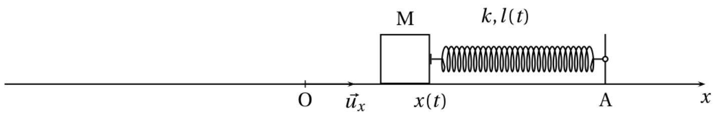


FIGURE 2 : Mobile accroché, $t \geqslant 0$.

Initialement le ressort est à sa longueur à vide, son extrémité libre est alors en O, l'origine de l'axe Ox. Le mobile M percute l'extrémité libre du ressort à l'instant $t = 0$ et reste ensuite accroché.
On repère la position du mobile par le paramètre $x(t)$ si bien que pour $t \geqslant 0$, la masse étant accrochée au ressort, $x(t)$ correspond également à la position de l'extrémité mobile du ressort (cf FIGURE 2) .
Sauf indication contraire, on se place à $t \geqslant 0$, le mobile est accroché au ressort et on suppose $x(t) < \ell_0$ à tout instant.

1. Donner l'expression de l'énergie mécanique du système $\{\text{Mobile } M\}$ en fonction de x, de ses dérivées et des données du problème.
2. Par application du théorème de la puissance mécanique, montrer que l'équation différentielle en $x(t)$ correspond à celle d'un oscillateur harmonique dont on donnera la pulsation propre ω_0.
3. Précisez les valeurs initiales de la position $x(0)$ et de la vitesse $v(0) = \dot{x}(0)$ du mobile.
4. En déduire l'expression de $x(t)$ sous la forme

$$x(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t$$

5. Tracer l'allure de $x(t)$.

Corrigé :

1. Système $\{\text{Mobile } M\}$
   Référentiel : terrestre galiléen
   Bilan des forces :
   - Poids : force conservative. Ne travaille pas au cours du mouvement ($E_{pp} = cte$ on peut choisir $cte = 0$).
   - Tension du ressort : force conservative
   - Réaction normale du support : ne travaille pas

   Au cours du mouvement seule la tension du ressort travaille. On lui associe l'énergie potentielle :
   $$E_p = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2 = \frac{1}{2}k(\ell_0 - x - \ell_0)^2 = \frac{1}{2}k(-x)^2 = \frac{1}{2}kx^2$$
   si on choisit $E_p = 0$ pour $\ell = \ell_0$.

L'expression de l'énergie mécanique du mobile M est :

$$\boxed{E_m = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2}$$

2. D'après le théorème de la puissance mécanique $\dfrac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}_{nc} = 0$

$$\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}m2\dot{x}\ddot{x} + \frac{1}{2}k2x\dot{x} = \dot{x}\left(m\ddot{x} + kx\right) = 0$$

La solution $\dot{x} = 0\ \forall t$ étant sans intérêt, on en déduit l'équation du mouvement :

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$$

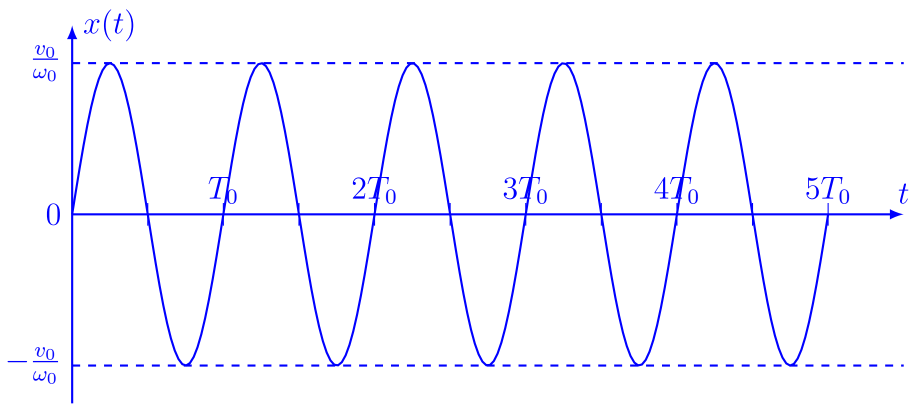
3. D'après l'énoncé, à $t = 0$ au moment du choc, le mobile passe en $\boxed{x(0) = 0}$ avec une vitesse $\boxed{v(0) = \dot{x}(0) = v_0}$.

4. La solution de l'équation différentielle est de la forme $x(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t$ et on détermine les **deux** constantes A et B grâce aux **deux** conditions initiales en *position* et en *vitesse*. On calcule donc $v(t) = \dot{x} = -A\omega_0\sin\omega_0 t + B\omega_0\cos\omega_0 t$

   - à $t = 0$ $\ x(0) = A = 0$ d'où $\boxed{A = 0}$
   - à $t = 0$ $\ \dot{x}(0) = B\omega_0 = v_0$ d'où $\boxed{B = \dfrac{v_0}{\omega_0}}$

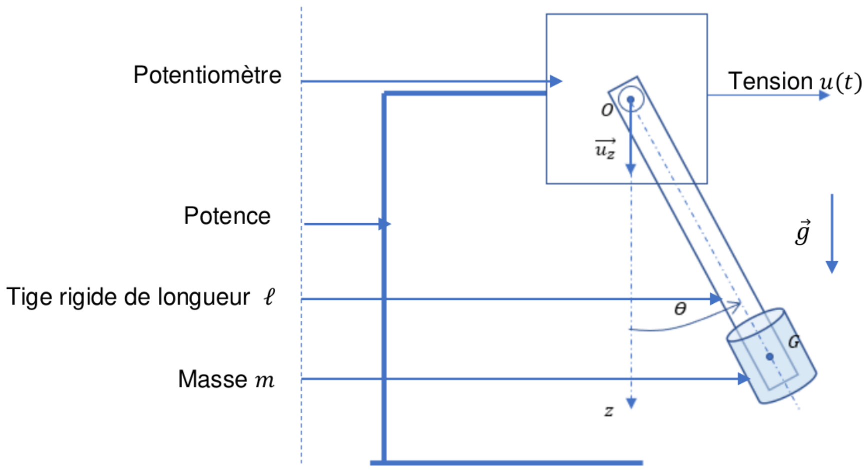
   On peut alors exprimer $x(t)$: $\boxed{x(t) = \dfrac{v_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t}$

5. Tracé de $x(t)$. On note $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ la période propre du système.



Oscillations d'un pendule - Concours ATS 2020 (extrait)

On considère le dispositif dessiné ci-dessous permettant d'observer le mouvement d'un pendule pesant constitué d'une tige rigide de longueur ℓ et d'une masse m fixée à son extrémité. À l'image du balancier d'une horloge ou d'une balançoire, la masse va osciller autour du point O. La position angulaire $\theta(t)$ de la tige est repérée par rapport à l'axe vertical descendant Oz. Un potentiomètre alimenté, fixé sur une potence et solidaire de la tige en rotation, permet d'apprécier la position angulaire $\theta(t)$ de la tige en délivrant une tension $u(t) = k\theta(t)$ avec k constante.



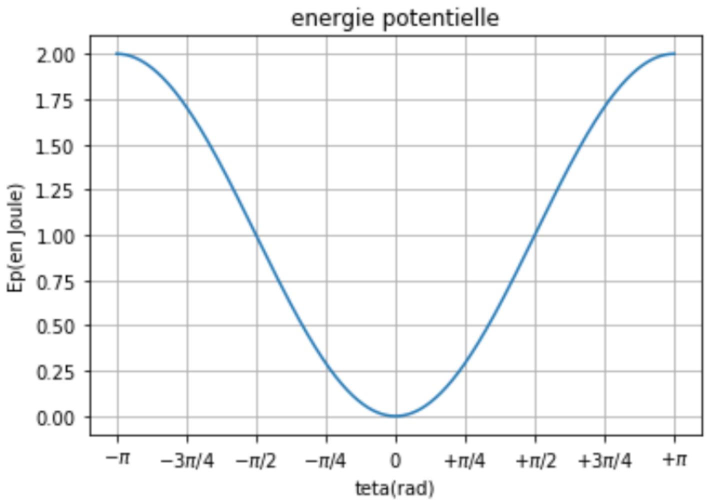
Dans toute la suite, nous allons travailler avec les hypothèses suivantes :

- Le mouvement du pendule est étudié dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen.
- Les frottements de type fluide seront négligés.
- On néglige également les effets dissipatifs des actions de contact entre le potentiomètre et la tige.
- On note $\vec{g}$ le champ de pesanteur terrestre tel que $\vec{g} = g\vec{u}_z$ et on néglige la poussée d'Archimède de l'air environnant.
- On néglige la masse de la tige par rapport à la masse dont le centre de masse G est tel que $OG \simeq \ell$.

Ce système oscillant est alors modélisé par un pendule simple dont l'étude se limite à celle de la masse m animée d'une vitesse algébrique v donnée par $v = \ell\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \ell\dot{\theta}$.

1. Établir l'expression de l'énergie cinétique E_c de ce pendule en fonction de m, ℓ et $\dot{\theta}$
2. Établir l'expression de l'énergie potentielle E_p associée à ce pendule en fonction de m, g, ℓ et θ en prenant $E_p(\theta = 0) = 0$.
3. Énoncer le théorème de la puissance mécanique. On nommera les termes intervenant dans ce théorème.
4. Montrer alors que l'angle $\theta(t)$ vérifie l'équation différentielle non linéaire $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin\theta = 0$. On donnera l'expression de la pulsation propre ω_0 en fonction de g et ℓ.
5. Pour cette question uniquement, on se place dans l'approximation harmonique qui impose une faible amplitude angulaire des oscillations (amplitude inférieure à 30°). Dans ces conditions, on accepte le développement limité à l'ordre 1 suivant : $\sin\theta \simeq \theta$.
   - ▷ Établir l'expression de $\theta(t)$ en prenant comme conditions initiales : $\theta(0) = 0$ et $\dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0 > 0$.
   - ▷ Donner l'expression de la période propre T_0 des oscillations harmoniques.
   - ▷ Représenter l'allure de $\theta(t)$ sur quelques périodes propres T_0.

On donne ci-dessous la représentation graphique de $E_p(\theta)$ du pendule avec $m = 0,2$ kg.



À $t = 0$, on lance la masse m avec une vitesse initiale $v(0) = v_0 = \sqrt{10}$ m.s^{-1} à la position angulaire $\theta(t = 0) = 0$.

6. Quelle est la valeur de l'énergie mécanique de la masse m ? Justifier.
7. Quelle sera la position angulaire maximale atteinte par la masse m ? Justifier.

Corrigé :

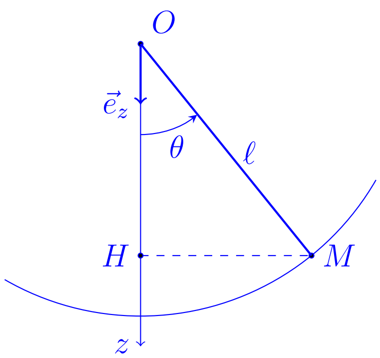
1. Système : pendule (tige+masse m)

   On se place dans le référentiel du laboratoire.

   La masse de la tige est supposée négligeable.

   $E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\ell\dot{\theta})^2$

   $\boxed{E_c = \dfrac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2}$

2. 

L'axe Oz est orienté vers le bas. L'énergie potentielle de pesanteur a donc pour expression :

$$E_p = -mgz + cte$$

On lit graphiquement $z = \overline{OH} = \ell\cos\theta$.
Ainsi $E_p(\theta) = -mg\ell\cos\theta + cte$.
On choisit $E_p(0) = -mg\ell + cte = 0$. D'où $cte = mg\ell$.

$$\boxed{E_p = mg\ell(1 - \cos\theta)}$$

3. Théorème de la puissance mécanique : dans un référentiel galiléen,

$$\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}_{nc}$$

avec $E_m = E_c + E_p$ l'**énergie mécanique** du système et $\mathcal{P}_{nc}$ la **puissance des forces non conservatives**.

4. Système : pendule (tige+masse m)

   Référentiel du laboratoire supposé galiléen.

   Au cours du mouvement on néglige tout effet dissipatif au niveau du contact tige-potentiomètre et tout frottement de type fluide $\Rightarrow$ aucune force non conservative ne travaille. D'après le théorème de la puissance mécanique :

$$\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}_{nc} = 0$$

   $E_m = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 + mg\ell(1-\cos\theta) = cte$

   $\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\cancel{2}}m\ell^2\cancel{2}\dot{\theta}\ddot{\theta} + mg\ell\sin\theta\dot{\theta} = m\ell\dot{\theta}\left[\ell\ddot{\theta} + g\sin\theta\right] = 0$

   La solution $\dot{\theta} = 0$ $\forall t$ étant sans intérêt, on en déduit : $\ell\ddot{\theta} + g\sin\theta = 0$. D'où

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0}.$$

   On pose $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}}$.

5. On se place dans l'approximation harmonique : on suppose $\theta \ll 1$ rad. On peut alors écrire $\sin\theta \simeq \theta$ (valable lorsque θ est exprimé en radian). L'équation du mouvement devient :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$$

   On reconnaît l'équation de l'oscillateur harmonique qui admet des solutions de la forme :

$$\theta(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t$$

   On détermine les constantes A et B à l'aide des conditions initiales :

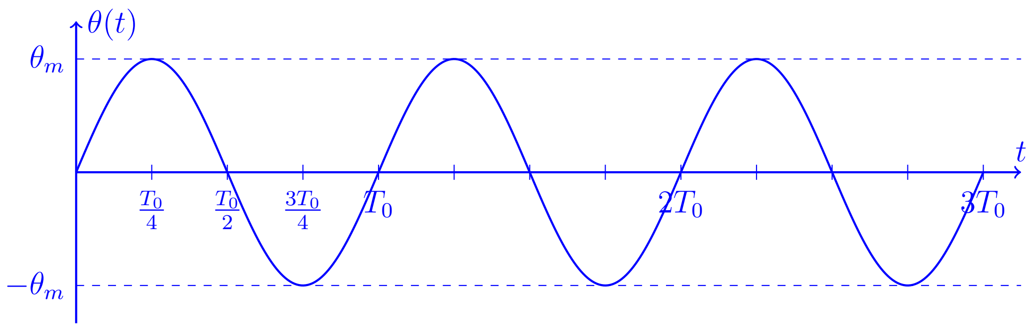
   $\theta(0) = 0 = A$ d'où $A = 0$

   $\dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0 = B\omega_0$ d'où $B = \frac{\dot{\theta}_0}{\omega_0}$

$$\boxed{\theta(t) = \frac{\dot{\theta}_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t}$$

   On en déduit la période des oscillations : $\boxed{T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}}$

   et l'allure de $\theta(t)$ pour $\dot{\theta}_0 > 0$. On note $\theta_m = \frac{\dot{\theta}_0}{\omega_0}$ l'amplitude des oscillations.



6. Le mouvement étant conservatif $E_m = cte = E_m(t=0)$.
$E_m = \frac{1}{2}mv(0)^2 + E_p(0) = \frac{1}{2} \times 0,2 \times 10 + 0 = 1$ J.

7. $E_m = \underbrace{\frac{1}{2}mv^2}_{\geqslant 0} + E_p \geqslant E_p$. Le mouvement n'est possible que dans le domaine où $E_m \geqslant E_p$.
La vitesse s'annule lorsque $E_m = E_p$. On constate graphiquement que $-\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$. Le mouvement est borné et la valeur angulaire maximale atteinte est $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$.